QCM - VRAI - FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Le réel $e^{-3\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ est égal à

☐ $-\frac{1}{8}$. ☐ 8. ☐ -6.

2. Le réel $2e^{x+y}$ est égal à

☐ e^{2x+2y}. ☐ $e^{2x}e^{2y}$. ☐ $2e^{x}e^{y}$.

3. L'équation $e^{x}=\frac{1}{e}$ est équivalente à

☐ $x=-1$. ☐ $x=\ln e$. ☐ $x=e$.

4. L'inéquation $-2<e^{x^2-1}<1$ est équivalente à

☐ $e^{x^2-1}>0$. ☐ $x^2>1$. ☐ $-1<x<1$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{2e^{x}}{x^4}-\frac{1}{x^2}$.

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

6. Sur $\mathbb{R}_+^*$ la dérivée de $f:x\mapsto\frac{e^{x}}{x}$ est

☐ $f'(x)=e^{x}$. ☐ $f'(x)=\frac{x-1}{x^2e^{-x}}$. ☐ $f'(x)=\frac{e^{x}(x+1)}{x^2}$.

7. L'intégrale $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ est égale à

☐ $e-1$. ☐ $\frac{1}{2}e$. ☐ $\frac{1}{2}(e-1)$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln x<x<e^{x}$.
3. Soit r un rationnel différent de 1.
   La fonction $x\mapsto x^{r+1}$ est une primitive de $x\mapsto x^{r}$ sur $]0,+\infty[$.
4. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ est paire.
5. L'équation $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1$ est équivalente à $e^{x}=1$.

1 1. Simplifier les écritures ci-dessous.

$e^{5\ln(3)}$ et $e^{-3\ln(2)}$.

2. Soit x un réel, Ecrire plus simplement les réels ci-dessous.

$e^x.e^{-2x}$, $e.e^x$, $\left(e^{-x}\right)^2$, $\dfrac{e^x}{e^{-x}}$,

$\dfrac{e^{2x}}{e^{1-x}}$ et $\dfrac{\left(e^x\right)^4}{e^{2x}}$.

3. Vérifier que pour tout réel x,

a. $e^{2x}+e^{-2x}+2=\left(e^x+e^{-x}\right)^2$.

b. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

4. a. Montrer que,

si $1\le e^x\le 2$ alors $\dfrac{1}{4}\le e^{-2x}\le 1$.

b. Montrer que,

si $1\le e^x\le 9$ alors $2\le 2e^{\frac{x}{2}}\le 6$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes.

1. $\left(x^2-5x+4\right)e^x=0$.

2. $e^{\frac{x}{4}}=\dfrac{1}{e}$.

3. $e^{3x}-e^{-x}=0$.

4. $e^{2x}+e^x-2=0$.

5. $e^x-5e^{-x}+4=0$.

6. $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=4$.

7. $e^{-x}\le 1$.

8. $e^{-3x}\ge 0$.

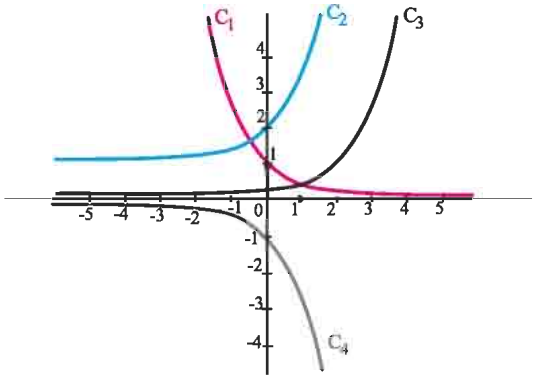
9. $e^{2x}-\dfrac{1}{e^x}\ge 0$.

10. $2-e^{\frac{1}{x}}>0$.

11. $e^x+\dfrac{2}{e^x}-3\le 0$.

3 On a représenté dans un même repère les courbes représentatives des fonctions

$f:x\mapsto -e^x$, $g:x\mapsto e^{-x}$, $h:x\mapsto\dfrac{1}{e^{2-x}}$ et $k:x\mapsto 1+e^x$.



Associer chaque fonction à sa courbe.

4 Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{e^k}$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{e}{e-1}$.

5 Déterminer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}-2e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}2e^x-\dfrac{1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x-\dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-(1-x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x+3\right)e^x$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x\right)e^x$; $\lim\limits_{x\to0^+}xe^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-e^{2x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-e^x}{x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(e^{2x}-e^x\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-e^{-x}}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{\sqrt{2x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}x(e^{\frac{1}{x^2}}-1)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}{e^{\frac{1}{x}}+1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})$.

6 Pour chacune des fonctions suivantes, donner la dérivée f' sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto 2x - e^{-x}$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$, $I = \mathbb{R}_+^*$.
3. $f : x \mapsto xe^{-x}$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{e^x}$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}-1}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto 2x - 2\ln\left(1+e^x\right)$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = e^x \ln(x)$, $I = \mathbb{R}_+^*$.
8. $f(x) = e^{-x}\left(e^{2x} + e^x - 1\right)$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $I = \mathbb{R}$.

7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On sait que la courbe C passe par le point $A(0,1)$ et qu'elle admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. On sait aussi que $f'(0) = -6$.

Déterminer a, b et c.

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

1. calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Pour tout entier non nul n, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{ème}$ de f. Montrer que $f^{(n)}(x) = (-1)^n\left(x^2 + a_n x + b_n\right)e^{-x}$, où a_n et b_n sont des réels.

Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de a_n et b_n.

3. Donner l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de $f^{(100)}$.

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto e^{2x}$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto xe^{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2(x)}$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. $f : x \mapsto \sin(2x)e^{\cos^2(x)}$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$, $I =]1, +\infty[$.
6. $f : x \mapsto \sqrt{e^x}$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f : x \mapsto xe^{2x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

10 1. Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_0^1 \left(1+e^x\right)dx$.

b. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$.

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$.

d. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1+e^x}$.

e. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}e^{\ln(x)}\,dx$

f. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}dx$.

g. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$.

2. Calculer à l'aide des intégrations par parties les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_1^2 2xe^{-x}dx$.

b. $\int_0^1 \frac{x^3}{e^{x^2}}dx$.

c. $\int_0^{-\ln(2)} \frac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}dx$.

d. $\int_1^0 x^2e^xdx$.

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x dx$.

11 1. Montrer que pour tout $t>0$, $t+\frac{1}{t}\geq 2$.

2. En déduire que pour tout réel x,

$e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\geq 2$ et $\ln\left(1+e^x\right)\geq\frac{x}{2}+\ln 2$.

12 1. Montrer que pour tout réel $x\geq 0$,

$0\leq e^x-1\leq xe^x$.

2. En déduire que pour tout réel $x\geq 0$,

$0\leq e^x-1-x\leq\frac{x^2}{2}e^x$.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\frac{2+e^x}{1+e^x}$.

1. Trouver des réels a et b tels que pour tout réel x,

$f(x)=a+\frac{be^x}{1+e^x}$.

2. Calculer $\int_0^1 \frac{2+e^x}{1+e^x}dx$.

14 Soit la fonction $f:x\mapsto x-2+e^{-\frac{x}{2}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Etudier les variations de f.

2. a. Vérifier que la droite $D:y=x-2$ est une asymptote à C_f.

b. Tracer D et C_f.

3. Soit $\lambda>0$ et la droite $\Delta:x=\lambda$.

On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, D, Δ et l'axe des ordonnées.

Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

15 Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Etudier la parité de f.

2. a. Etudier les variations de f.

b. Tracer C_f.

3. Soit $\lambda>1$ et la droite $\Delta:x=\lambda$.

On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, Δ, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Calculer $A(\lambda)$.

16 1. a. Montrer que pour tout réel non nul x,

$e^x>1+x$.

b. En déduire que

i. Pour tout réel non nul x on a $e^{-x}>1-x$.

ii. Pour tout réel x de $]0,1[$ on a $e^x<\frac{1}{1-x}$.

2. Soit les suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ définies par

$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n\geq 1$.

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$u_n<e<v_n$.

b. Sachant que $2<e<3$, montrer que $v_n-u_n\leq\frac{3}{n}$

c. En déduire un encadrement de e d'amplitude 10^{-6}.

17 1. Calculer les intégrales $A=\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx$ et

$B=\int_0^1\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout

$t>0$, $\frac{1}{(1+t)^2}=a+\frac{bt}{(1+t)}+\frac{ct}{(1+t)^2}$.

En déduire la valeur de $I=\int_0^1 \frac{1}{\left(1+e^x\right)^2}dx$.

3. On pose $J=\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$.

Exprimer J en fonction de I et en déduire la valeur de J.

18 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2-e^{\frac{1}{x}}>0$.

2. Soit la fonction $f:x\mapsto \ln\left(2-e^{\frac{1}{x}}\right)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. En déduire que f est prolongeable par continuité à gauche en 0 (on note g le prolongement ainsi obtenu).

3. a. Etudier la dérivabilité de g à gauche en 0.

b. Déterminer les intervalles sur lesquels g est dérivable et expliciter $g'(x)$.

4. Etudier les variations de g et tracer sa courbe C_g dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

19 Soit un réel $a>0$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $G_a:x\mapsto e^{-ax^2}$.

1. Démontrer que G_a est dérivable et calculer sa dérivée.

2. En déduire le tableau de variation de G_a.

3. Calculer la dérivée seconde de G_a et démonter que la courbe de G_a admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

4. Déterminer le lieu des points d'inflexion des courbes de G_a lorsque a varie.

5. Tracer les courbes de G_a pour $a=\frac{1}{2}$,1 et 2.

20 Soit f la fonction définie par

$f(x)=\left|3x^2-1\right|e^{1-x^2}$.

1. Vérifier que f est paire.

2. Etudier la limite de f en $+\infty$.

3. Etudier la continuité de f.

4. Etudier la dérivabilité de f en $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Dresser le tableau de variation de f.

6. Donner une représentation graphique de f.

21 Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x\,dx$ et

$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x\,dx$.

1. calculer I_0 et J_0.

2. On suppose n non nul.

En intégrant par parties I_n, puis J_n, montrer que

$$\begin{cases} I_n+nJ_n=1, \\ -nI_n+J_n=e^{-\frac{n\pi}{2}}. \end{cases}$$

3. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

22 Pour tout entier naturel n, on pose

$I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-nx}\sin x\,dx$.

1. A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que $I_n=(-1)^n e^{-n^2\pi}\frac{1+e^{-n\pi}}{n^2+1}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

23 Soit n un entier naturel et m un entier non nul.

On pose,

$$I(n,m)=\int_0^1 t^n(1-t)^m\,dt \text{ et } I(n,0)=\frac{1}{n+1}.$$

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I(n,m)=\frac{m}{n+1}I(n+1,m-1)$.

2. Montrer que $I(n,m)=\frac{n!m!}{(n+m)!}I(n+m,0)$.

Montrer alors que $I(n,m)=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$.

24 Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2}, \\ u_{n+1}=\frac{e^{u_n}}{u_n+2},\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Dans cet exercice, on se propose de montrer que (u_n) est convergente et de donner une valeur approchée de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1. On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$.

a. Etudier les variations de f.

b. Montrer que pour tout x de $[0,1]$, $|f'(x)|\le\frac{e}{4}$.

c. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $[0,1]$.

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\le u_n\le 1$.

3. a. Justifier l'égalité $f(x)-f(\alpha)=\int_\alpha^x f'(v)dv$.

b. En déduire que pour tout entier n, $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{e}{4}|u_n-\alpha|$.

c. Montrer alors que pour tout entier n, $|u_n-\alpha|\le\frac{1}{2}\left(\frac{e}{4}\right)^n$.

En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

25 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^x$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{2^{x^2+x}}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+3^{x+1}}{2^x+2^{x-1}}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{2^x}$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}e^{-x}$.
9. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}\right)\ln x$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x-e^x$.

26 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(2^x)-\ln(x^2)$.

1. Calculer $f(2)$ et $f(4)$.

2. Etudier les variations de la fonction f et en déduire son signe.

3. Comparer x^2 et 2^x.

27 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Déterminer le sens de variation de f.

En déduire le nombre de solutions de l'équation $3^x+4^x=5^x$.

28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{4^x}{4^{2x}-1}$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.
3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\dfrac{4}{15}$

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=-\dfrac{4}{15}$

29 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 3^x dx$.
2. $\int_0^{-1} \dfrac{3^x}{1+3^x} dx$.
3. $\int_0^{\frac{1}{\ln(2)}} 2^x\left(1+2^x\right)^2 dx$.
4. $\int_1^2 x^{\frac{4}{3}} dx$.
5. $\int_{\frac{1}{2}}^1 4x^{-\frac{1}{5}} dx$.
6. $\int_0^1 \sqrt[4]{x}\, dx$.
7. $\int_{\frac{1}{2}}^1 (3x-1)^{\frac{3}{2}} dx$.

30 Le but de l'exercice est de calculer

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \cos^2(x)dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \sin^2(x)dx$.

1. Montrer que $I+J=\dfrac{\sqrt{2^\pi}-1}{\ln 2}$.
2. Soit $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \cos(2x)dx$.

A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $K=-\dfrac{\ln 2}{2}\left[\dfrac{\sqrt{2^\pi}+1}{2}+\dfrac{\ln 2}{2}K\right]$.

En déduire la valeur de $I-J$.

3. Donner les valeurs de I et J.

31 1. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^{-\alpha}$, où α est un rationnel strictement supérieur à 1.

Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

2. Soit (S_n) la suite définie par $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^\alpha}$, $n\geq 1$.

Soit k un entier supérieur où égal à 1.

Montrer que pour tout x de $[k,k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha}\leq\int_k^{k+1} f(x)dx\leq\frac{1}{k^\alpha}.$$

3. a. Montrer que pour tout entier n,

$$\int_1^{n+1} f(x)dx\leq S_n\leq S_1+\int_1^n f(x)dx.$$

b. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée.

c. En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

d. Déterminer un réel α tel que la suite (S_n) converge vers un réel compris entre 2007 et 2008.

32 A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1+x-e^{-\frac{x}{2}}$.

On désigne par C_f sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Montrer que la droite D d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

c. Etudier la position de C_f par rapport à D.

2. a. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.

b. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe C_f et la droite D (Unités graphiques 2 cm).

B/ Soit un entier $n > 0$, on désigne par A_n l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan limitée par la droite D, la courbe C_f et les droites d'équations $x = n$ et $x = n+1$.

1. Exprimer A_n en fonction de n.

2. En déduire que la suite (A_n) est géométrique. On précisera sa raison q et son premier terme A_1.

3. Exprimer la somme $S_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$ en fonction de n. Que représente S_n graphiquement ?

4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

33 On considère la fonction numérique f de la variable réelle x, définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}\,e^{1-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Interpréter graphiquement.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x strictement positif.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3. Dresser le tableau de variations de f.

4. Tracer la courbe C.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a deux solutions, l'une α dans l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ et l'autre β dans $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

34 A/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Etudier le sens de variation de g et puis dresser son tableau de variation.

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles 0 et α telle que $-1.6 \le \alpha \le -1.5$.

4. En déduire le signe de g.

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

Etudier les variations de f.

3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4}$.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6. Soit m un réel négatif.

a. Calculer $\int_m^0 xe^x dx$.

b. Calculer alors $\int_m^0 f(x)dx$.

c. Déterminer $\lim\limits_{m\to-\infty} \int_m^0 f(x)dx$.

35 A/ Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2+x+1)\,e^{-x} - 1$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

2. Etudier les variations de φ puis dresser son tableau de variations.

3. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une α dans l'intervalle $[1,+\infty[$. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

4. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

B/ On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+1)e^{-x}$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

On note C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Vérifier que C_f et C_g passent par $A(0,1)$.
Montrer que C_f et C_g admettent en ce point la même tangente.

2. a. Vérifier que $f(x)-g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$.

b. Etudier le signe de $f(x)-g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire la position relative de C_f et C_g.

3. a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=-(2x+3)e^{-x}$.
Vérifier que $F'(x)=f(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

b. En déduire la primitive sur $\mathbb{R}$ de $f-g$ qui s'annule en 0.

36 A/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$.
et on note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(t)=\dfrac{t}{1+t}-\ln(1+t)$.
Etudier les variations de g sur $[0,+\infty[$ et en déduire le signe de $g(t)$.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^{-x}\left[\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}-\ln(1+e^{x})\right]$.

b. Etudier le sens de variations de f.

3. a. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=xe^{-x}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})$.

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

4. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe C.

B/ On considère la suite (u_n) définie par
$\begin{cases} u_0=0.5, \\ u_{n+1}=f(u_n), n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

1. a. Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution notée α. Montrer que $0.5\le x\le 0.6$.

b. Démontrer que pour tout réel x tel que $0.5\le x\le 0.6$, $0.5\le f(x)\le 0.6$ et $-0.25\le f'(x)\le 0$.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha|\le 0.25|u_n-\alpha|$.

Montrer par récurrence que $|u_n-\alpha|\le (0.25)^n\times 0.1$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

c. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n\ge n_0$, $|u_n-\alpha|\le 5\times 10^{-4}$.

C/ L'objet de cette partie est l'étude d'une primitive de f.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)+f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

2. En utilisant la question précédente, calculer une primitive F de f.

37 Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On se propose d'étudier, pour tout entier $n>0$, les fonctions f_n définies sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}\right)e^{-x}$.

1. a. Justifier que f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

c. Etudier le sens de variation de f_n.

2. a. Montrer que pour tout réel $x\in[0,1]$, $\dfrac{-1}{n!}\le f_n'(x)\le 0$.

b. En déduire que $\dfrac{-1}{n!}\le f_n(x)-1\le 0$.

3. En utilisant l'encadrement précédent, déterminer la limite de la somme $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B

Pour tout entier $n\geq 2$, on pose $u_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ et $a_n=\ln(u_n)$.

1. Vérifier que pour tout entier $n\geq 2$, $a_n=-\dfrac{\ln\left(1+(-\frac{1}{n})\right)}{(-\frac{1}{n})}$.

2. En déduire que la suite (a_n) est convergente.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

38 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$.

On note C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A/ 1. a. Montrer que le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie de C.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

c. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f.

2. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe C au point A.

b. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)-f(x+1)$.

Montrer que pour tout réel x, $g'(x)=-\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

a. En déduire le sens de variation de la fonction g (on précisera $g(0)$).

b. En déduire la position de C et Δ.

3. Tracer la courbe C et Δ.

B/ Dans cette partie, on désigne par I, l'intervalle $[2,3]$.

1. a. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=x$ si, et seulement si, $g(x)=-1$.

b. En déduire que la droite D d'équation $y=x$ coupe la courbe C en un seul point dont l'abscisse α est telle que $2<\alpha<3$.

2. On suppose que pour tous réels x et x' de I, $|f(x)-f(x')|\leq\frac{1}{2}|x-x'|$.

En déduire que, pour tout réel x de I, $|f(x)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

3. On définit la suite (u_n) d'éléments de l'intervalle I telle que $\begin{cases}u_0=3,\\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}|3-\alpha|$.

b. Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

c. Donner en utilisant la calculatrice une valeur approchée de u_p.

39 A/ On désigne par g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=e^x-\ln(x)-xe^x+1$.

1. Déterminer la limite de g en 0.

2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

3. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

4. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.

5. Justifier que $\alpha\in]1.23\ ,\ 1.24[$ (*).

6. Donner le signe de $g(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

B/ On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-\ln(x)} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

On désigne par C la représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Montrer que $f'(x)$ est de même signe que $g(x)$.

En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.

5. Monter que $f(\alpha)=\dfrac{1}{e^{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}}$.

C/ 1. Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{e^{x}-\dfrac{1}{x}}$.

2. En utilisant l'encadrement $(*)$ du réel α, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.

En déduire que 0.38 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2}.

3. Tracer la courbe C et préciser ses tangentes aux points d'abscisses 0 et α.

40 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\left(\dfrac{1-x}{2}\right)e^{2x}$.

On désigne par C la courbe représentative de f. (On prendra 2cm pour unité graphique)

1. a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y=\dfrac{1}{2}x$ est une asymptote à la courbe C.

c. Etudier la position de la droite Δ par rapport à la courbe C.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=1+(1-2x)e^{2x}$.

a. Etudier le sens de variation de u.

b. Montrer que l'équation $u(x)=0$ possède, dans l'intervalle $[0,1]$, une solution unique α.

c. Déterminer une valeur approchée décimale de α par excès à 10^{-2} près.

d. Déterminer le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

B/ On considère la courbe C′ d'équation $y=e^{x}$ et la droite Δ' d'équation $y=x$.

1. Pour tout réel t, on désigne par M_t le point de C′ d'abscisse t. La tangente T à la courbe C′ au point M_t coupe l'axe des ordonnées au point N_t.

Déterminer les coordonnées du point N_t.

2. Pour tout réel t, on désigne par P_t le point de Δ' d'abscisse t et par G_t le barycentre des points pondérés $(O,1)$, $(M_t,1)$, $(P_t,1)$ et $(N_t,1)$.

a. Placer les points M_{-2}, P_{-2} et N_{-2} puis construire en le justifiant le point G_{-2}.

b. Déterminer en fonction de t, les coordonnées du point G_t.

3. Quel est l'ensemble des points G_t, quand t décrit $\mathbb{R}$?

C/ 1. Construire la courbe C.

2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, de la partie du plan délimitée par la courbe C, la droite Δ et les droites d'équations $x=0$ et $y=0$.

41 On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etude des variations de f.

a. Montrer que la dérivée f' de f sur $[0,+\infty[$ est de la forme $e^{-\frac{1}{x}}Q(x)$, où Q est une fonction rationnelle.

b. Déterminer la limite de $(1+t)e^{-t}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$.

c. Etudier le sens de variation de f.

d. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

e. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près.

2. Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(t)=1-(1+t)e^{-t}$.

a. Calculer la dérivée de φ.

b. Prouver que, pour tout réel positif ou nul t, $0\le\varphi(t)\le\frac{1}{t^2}$.

3. Etablir que , pour tout réel strictement positif x, $0\le x-f(x)\le\frac{1}{2x}$.

En déduire que C admet une asymptote D au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de C par rapport à D.

4. Soit a un réel strictement positif et T_a la tangente à C au point d'abscisse $\frac{a}{1+a+a^2}$.

a. Déterminer une équation de T_a.

b. Déterminer l'intersection de T_a avec l'axe des abscisses.

5. Construire C et D. On placera le point de C d'ordonnée 2 et on précisera les tangentes à C aux points d'abscisses $\frac{1}{3}$, 1 et 3

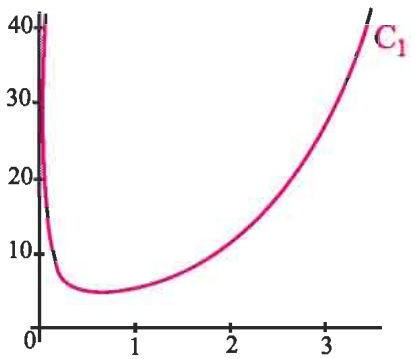
42 Pour tout réel $k\le 0$, on considère la fonction f_k définie sur $]0,+\infty[$ par $f_k(x)=\frac{kx+1}{x}e^x$.

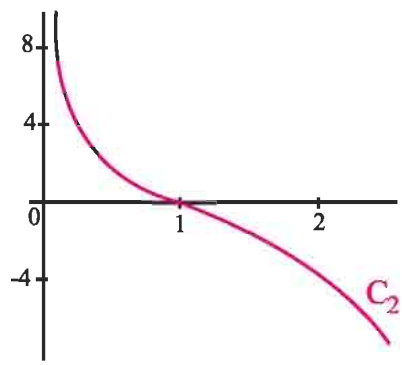
1. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

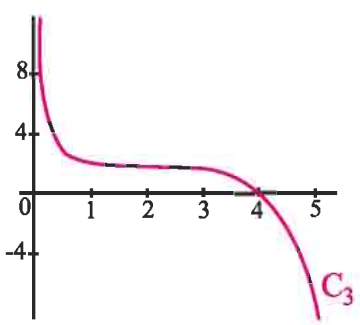
2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$ et déterminer le nombre de solution de l'équation $f_k'(x)=0$.

3. On a représenté ci-après les fonctions f_{-1}, $f_{-0.25}$ et f_0.

Identifier la courbe de chaque fonction.







4. Pour tout réel a strictement positif, on pose $A(a)=\int_a^{a+1} f_0(x)dx$.

a. Que représente le réel $A(a)$?

b. Etudier le sens de variation de $a\mapsto A(a)$.

c. Déterminer a pour que l'aire du domaine limité par C_0, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=a+1$ soit minimale.

43 A/ 1. Montrer que l'équation $(E): x+\ln x=0$ admet une unique solution α appartenant à $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

2. Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ définie par $\varphi(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

a. Vérifier que $\varphi(x)=x$, si et seulement si, $\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

b. En déduire que $\frac{1}{\alpha}$ est l'unique solution de $\varphi(x)=x$ dans $]0,+\infty[$.

c. Montrer que pour tout x de $[\frac{3}{2}, 3]$, $|\varphi'(x)|\le\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}$.

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_0=2$ et $v_{n+1}=\varphi(v_n)$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que pour tout entier n, $\frac{3}{2}\le v_n\le 2$.

b. Démontrer que pour tout entier n, $\left|v_{n+1}-\frac{1}{\alpha}\right|\le\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}\left|v_n-\frac{1}{\alpha}\right|$.

c. En déduire que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

B/ Etude d'une fonction.

On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+\ln x} & \text{si } x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{\alpha\},\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe C dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On prendra $\alpha\simeq 0.6$).

C/ Encadrement d'une aire.

Pour tout entier non nul n, on pose

$$u_n=\int_1^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx.$$

1. Calculer u_1.

2. Montrer à l'aide de deux intégrations par parties que $u_2=1-\ln 2-\frac{(\ln 2)^2}{2}$.

3. Soit un réel $x>0$ et n un entier naturel non nul. Simplifier la somme

$$1-\frac{\ln x}{x}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2+\ldots(-1)^n\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n.$$

4. Pour tout entier non nul n, on pose $I_n=1-u_1+u_2+\ldots+(-1)^n u_n$ et $I=\int_1^2 f(x)dx$.

a. Montrer que $I-I_n=\int_1^2(-1)^{n+1}f(x)\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}dx$.

b. Montrer que pour tout $x>0$, $\frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e}$, puis que $|I-I_n|\le\frac{1}{e^{n+1}}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

d. Vérifier que $I_2-\frac{1}{e^3}\le I\le I_2$.

D/ Fonction définie à l'aide d'une intégrale.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(x)=\int_1^{e^x} f(t)dt.$$

1. Etudier la dérivabilité de F et déterminer $F'(x)$.

2. Vérifier que pour tout $t\ge 1$, $\frac{t}{t+\ln t}\ge\frac{1}{2}$.

3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.

4. Donner l'allure de la courbe de F.

QCM

1) $e^{-3\ln\frac{1}{2}} = 8$

2) $2e^{x+y} = 2e^{x}.e^{y}$

3) $e^{x} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = -1$

4) $-2 < e^{x^2-1} < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

6) $f'(x) = \frac{x-1}{x^2e^{-x}}$

7) $\int_0^1 xe^{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

Vrai – Faux

1) Vrai (théorème du cours)

2) Vrai ,en effet : pour x $\in \mathbb{R}_+^*$ soit $f(x) = x - \ln(x)$

$f'(x) = \frac{x-1}{x}$ d'où le tableau des variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

f admet *le* réel 1 comme minimum absolu $\Rightarrow$

$f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow x - \ln(x) > 0$

$\Rightarrow \boxed{\ln(x) < x}$, $\forall x \in IR_+^*$ (1)

Comme $\ln(x) < x \Rightarrow e^{\ln(x)} < e^{x} \Rightarrow \boxed{x < e^{x}}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $\ln x < x < e^{x}$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

3) Faux : $(x^{r+1})' = (r+1)x^{r}$

4) Faux

$f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{1-e^{x}}{1+e^{x}} = -f(x)$, f est impaire

2) Vrai

$\frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = 1 \Leftrightarrow e^{x}+e^{-x} = 2$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^{x}-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{x} = 1$

Ex1

1) $e^{5\ln 3} = \left(e^{Ln(3)}\right)^5 = 3^5 = 243$

$e^{-3\ln 2} = (e^{\ln 2})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

2) $e^{x}e^{-2x} = e^{x}$, $e e^{x} = e^{x+1}$, $(e^{-x})^2 = e^{-2x}$

$\frac{e^{x}}{e^{-x}} = e^{2x}$, $\frac{e^{2x}}{e^{1-x}} = e^{3x-1}$

$(\frac{e^{x}}{e^{2x}})^4 = (e^{-x})^4 = e^{-4x}$

3) a) $(e^{x} + e^{-x})^2 = (e^{x})^2 + (e^{-x})^2 + 2e^{x}.e^{-x}$

$= e^{2x} + e^{-2x} + 2$

b) $\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{e^{x} - \frac{1}{e^{x}}}{e^{x} + \frac{1}{e^{x}}} = \frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}} =$

$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

4) a) $1 \leq e^{x} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq e^{-x} \leq 1$

$\Rightarrow (\frac{1}{2})^2 \leq (e^{-x})^2 \leq (1)^2 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq e^{-2x} \leq 1$

b) $1 \leq e^{x} \leq 9 \Rightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{e^{x}} \leq \sqrt{9}$

$\Rightarrow 1 \leq e^{\frac{1}{2}x} \leq 3 \Rightarrow 2 \leq 2e^{\frac{1}{2}x} \leq 6$

EX2

1) $(x^2-5x+4)\,e^x=0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0$,
car $e^x \neq 0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=4$ donc $S_{IR}=\{1,4\}$

2) $e^{\frac{x}{4}}=\frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{\frac{x}{4}}=e^{-1} \Leftrightarrow \frac{x}{4}=-1$

$\Leftrightarrow x=-4$ donc $S_{IR}=\{-4\}$

3) $e^{3x}-e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^{3x}=e^{-x} \Leftrightarrow 3x=-x$

$\Leftrightarrow 4x=0 \Leftrightarrow x=0$ donc $S_{IR}=\{0\}$

4) $e^{2x}+e^{x}-2=0$, posons $t=e^x$ l'équation devient : $t^2+t-2=0$ donc $t'=1$ et $t''=-2$

$t=1 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$t=-2 \Leftrightarrow e^x=-2$ impossible car $e^x>0$

D'où $S_{IR}=\{0\}$

5) $e^{x}-5e^{-x}+4=0 \Leftrightarrow e^{2x}+4e^{x}-5=0$

Posons $t=e^x$, On aura : $t^2+4t-5=0$

Donc $t'=1$ ou $t''=-5$

Pour $t=1$ on a : $e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Pour $t=-5$ on a : $e^x=-5$ impossible car $e^x>0$

D'où $S_{IR}=\{0\}$

6) $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ a un sens si et seulement si $\frac{x-1}{x+1}>0$

Donc $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[=D$

Pour $x \in D$:

$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=4 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}=e^4$

$\Leftrightarrow x-1=xe^4+e^4$

$\Leftrightarrow x(1-e^4)=1+e^4 \Leftrightarrow x=\frac{e^4+1}{1-e^4} \in D$

Et par suite

$$S_{IR}=\left\{\frac{e^4+1}{1-e^4}\right\}$$

7) $e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Donc $S_{IR}=[0,+\infty[$

8) $e^{-3x} \geq 0$, $S_{IR}=IR$

9) $e^{2x}-\frac{1}{e^x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq \frac{1}{e^x}$

$\Leftrightarrow e^{2x} \geq e^{-x}$

$\Leftrightarrow 2x \geq -x \Leftrightarrow 3x \geq 0$

$S_{IR}=[0,+\infty[$

10) $2-e^{\frac{1}{x}}>0$ existe dans IR*

$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}<2 \Leftrightarrow \frac{1}{x}<\ln 2 \Leftrightarrow$

$x>\frac{1}{\ln 2}$ ou $x<0$

$S_{IR}=]-\infty,0[\cup]\ln 2,+\infty[$

11) $e^x+\frac{2}{e^x}-3 \leq 0 \Leftrightarrow e^{2x}-3e^x+2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (e^x-1)(e^x-2) \leq 0$

x	$-\infty$	0	ln2	$+\infty$
e^x-1	−	+	+	
e^x-2	−	−	+	
prodiut	+	−	+	

$S_{IR}=[0,\ln 2]$

EX3

$C_1 = C_g$ $\quad g(0) = 1$

$C_2 = C_k$ $\quad k(0) = 2$

$C_3 = C_h$ $\quad h \geq 0$ et $\lim\limits_{-\infty} h = 0$

$C_4 = C_f$ $\quad f(x) < 0$

EX4

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{e^k}$$

Soit $U_n = \dfrac{1}{e^n} = e^{-n}$

(U_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{e}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{e^k} = U_0 \left(\frac{1-(\frac{1}{e})^n}{1-\frac{1}{e}}\right)$$

$$= \frac{e}{e-1}\left[1-(\frac{1}{e})^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = 0 \quad \text{car} \quad -1 < \frac{1}{e} < 1$$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n = \dfrac{e}{e-1}$

EX5

* $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - e^x) =$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \frac{e^x}{x^2}\right) = -\infty$$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{3x} - 2e^x) =$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x (e^{2x} - 2) = +\infty$$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} (2e^x - \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}) = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x - \frac{1}{x}) = 0$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-(1-x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x}{e} = 0$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2x + 3)e^x =$

$$\lim_{x \to -\infty} (\overbrace{x^2 e^x}^{0} - \overbrace{2x e^x}^{0} + \overbrace{3e^x}^{0}) = 0$$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x)e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 e^x - x e^x) = 0$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$

(on pose $t = \dfrac{1}{x}$)

* $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - e^{2x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 [1 - \overbrace{\frac{e^{2x}}{x^3}}^{\to +\infty}] = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}} =$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} =$$

$$\lim \left(\frac{e^x}{\sqrt{x}}\right) \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - e^x}{x^2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{e^x}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = -\infty$$

On pose $X = -\dfrac{1}{x}$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to -\infty} -X e^X = 0$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x} = +\infty$

* $\lim_{x \to +\infty} x^2 (e^{2x} - e^x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^x (e^x - 1) = +\infty$

* $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)}{x}(e^x + 1) = 2$

* $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^{-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{xe^x}{e^x - 1} =$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

* $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{2x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2x}}{2}($

$\frac{e^x - 1}{x}) = 0 \times 1 = 0$

$\lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to -\infty} x(e^{\frac{1}{x^2}} - 1) = \lim_{t \to 0+} \frac{-1}{\sqrt{t}}(e^t - 1) =$

$\lim_{t \to 0^+} -\sqrt{t}(\frac{e^t - 1}{t}) = 0 \times 1 = 0$ (on pose $t = \frac{1}{x^2}$)

* $\lim_{x \to +\infty} (\frac{x(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{e^{\frac{1}{x}} + 1}) = \frac{1}{2}$ d'après ce qui précède

$\lim_{x \to +\infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) = ?$

Soit $f(x) = x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$

On sait que : $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$

On a $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} (1 - e^{-\frac{1}{x(x+1)}})$

$$= \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{-x(x+1)} (\frac{(1 - e^{-\frac{1}{(x+1)x}})}{-\frac{1}{x(x+1)}})$$

Or $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ $X = -\frac{1}{x(x+1)}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(1 - e^{-\frac{1}{(x+1)x}})}{-\frac{1}{x(x+1)}} =$$

$\lim_{x \to +\infty} -\frac{(e^X - 1)}{X} = -1$

et $\lim_{x \to +\infty} -\frac{x^2}{x(x+1)} = -1$

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

de même $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

EX6

1. $f'(x) = 2 + e^{-x}$

2. $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

3. $f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1-x)\,e^{-x}$

4. $f'(x) = \frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$

$= (2-x)\,e^{-x}$

5. $f'(x) = \frac{2e^x(x^2+1) - 2x(e^{2x}-1)}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{2\left[(x^2-x+1)e^{2x} + x\right]}{(x^2+1)^2}$

6. $f'(x) = 2 - 2\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{2}{e^x+1}$

7. $f'(x) = e^x.\mathrm{Ln}(x) + \frac{e^x}{x} = (\frac{1}{x} + \mathrm{Ln}(x))\,e^x$

8. $f'(x) = e^x + e^{-x}$

9. $f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} =$

$\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

EX7

$f(x) = (ax^2 + bx + c).\,e^{-x}$

$A(0,1) \in (\xi_f) \Rightarrow f(0) = 1$

On a aussi $f'(1) = 0$ et $f'(0) = -6$

Or : $f'(x) = (2ax + b)\,e^{-x} - (ax^2 + bx + c).\,e^{-x}$

$f'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + (b-c)].\,e^{-x}$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f'(0) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a - c = 0 \\ b - c = -6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad c = 1 \; ; \; a = 1$ et $b = -5$

Donc : $f(x) = (x^2 - 5x + 1).\,e^{-x}$

EX8

$f(x) = (x+1)^2.\,e^{-x}$

1) $f'(x) = 2(x+1)\,e^{-x} - e^{-x}(1+x)^2$

$= (1 - x^2)\,e^{-x}$

$f''(x) = -2x\,e^{-x} - e^{-x}(1 - x^2)$

$= (x^2 - 2x - 1)\,e^{-x}$

2) Démonstration par récurrence :

* Pour n = 1

$f'(x) = (1-x^2)\,e^{-x}$

$= (-1)^1[(x^2 - 0.x + (-1)]\,e^{-x}$

$a_1 = 0$ et $b_1 = -1$ (Vrai)

*supposons que :

$f^{(n)}(x) = (-1)^n[(x^2 + a_n.x + b_n]\,e^{-x}$

avec a_n. et b_n des réels et montrons que

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}[(x^2 + a_{n+1}.x + b_{n+1}]\,e^{-x}$

en Effet

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n[(2x + a_n)\,e^{-x} - (x^2 + a_n.x + b_n)e^{-x}]$

$= (-1)^n[-x^2 - (a_n. - 2)x + (a_n - b_n)]\,e^{-x}$

$= (-1)^{n+1}[x^2 + (a_n. - 2)x + (b_n - a_n)]\,e^{-x}$

De la forme

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}[x^2 + a_{n+1}\,x + b_{n+1}]\,e^{-x}$

avec $\begin{cases} a_{n+1} = a_n. - 2 \\ a_1 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_{n+1} = b_n - a_n \\ b_1 = -1 \end{cases}$

3) $(a_n.)$ est une suite arithmétique de raison

$r = -2$ d'où $a_n = a_1 + (n-1)r$

$\boxed{a_n = -2(n-1)}$

pour $k \geq 2$, $b_k = b_{k-1} - a_{k-1}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} b_k = \sum_{k=2}^{n} b_{k-1} - \sum_{k=2}^{n} a_{k-1}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$\Rightarrow b_n = b_1 - \frac{n-1}{2}(a_1 + a_{n-1})$

$\Rightarrow b_n = b_1 - \frac{n-1}{2}[-2(n-2)]$

$\Rightarrow b_n = -1 + (n-1).(n-2)$

D'où $\boxed{b_n = n^2 - 3n + 1}$

4) $a_{100} = -198$ et $b_{100} = 9701$

Donc $f^{(100)}(x) = (x^2 - 198x + 9701)e^{-x}$

EX9

1) $f(x) = e^{2x}$

$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

2) $f(x) = xe^{1+x^2}$

$F(x) = \frac{1}{2}e^{1+x^2}$

3) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}e^{\tan x}$

$F(x) = e^{\tan x}$

4) $f(x) = \sin(2x)e^{\cos^2 x}$

$= 2\sin x.\cos x\ e^{\cos^2 x}$

$F(x) = -e^{\cos^2 x}$

5) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$

$F(x) = -e^{\frac{1}{x-1}}$

6) $f(x) = \sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$

$F(x) = 2\ e^{\frac{1}{2}x} = 2\sqrt{e^x}$

7) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$F(x) = \frac{1}{2}\text{Ln}\,(1+e^{2x})$

8) $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}}$

$= \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} - \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}+1}$

$F(x) = \frac{1}{2}\text{Ln}\,(1+e^{2x}) + \frac{1}{2}\text{Ln}\,(1+e^{-2x})$

$= \frac{1}{2}\text{Ln}\,[(e^{2x}+1)(e^{-2x}+1)]$

$F(x) = \frac{1}{2}\text{Ln}\,(e^{2x}+e^{-2x}+2)$

9) $f(x) = xe^{2x^2}$

$F(x) = \frac{1}{4}e^{2x^2}$

EX10

1) a) $\int_0^1 (1+e^x).dx = \left[x+e^x\right]_0^1 = e$

b) $\int_0^1 xe^{x^2}.dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$

c) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}.dx = \left[Ln(1+e^x)\right]_0^1$

$= \text{Ln}(\frac{1+e}{2})$

d) $\int_1^2 \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.dx$

$= \left[-Ln(1+e^{-x})\right]_1^2$

$= \text{Ln}\,(\frac{e^2+e}{e^2+1})$

e) $\int_1^2 \frac{1}{x}e^{Lnx}.dx = \int_1^2 .dx = 1$

f) $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.dx = \left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]_1^2$

$= \frac{e^2}{e^2+1} - \frac{e}{e+1}$

g) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}.dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = e - \sqrt{e}$

2) a) $I = \int_1^2 2xe^{-x}.dx$

$\begin{cases} v(x) = 2x & \rightarrow\ v'(x) = 2 \\ u'(x) = e^{-x} & \rightarrow\ u(x) = -e^{-x} \end{cases}$

D'où

$$I = \left[-2xe^{-x}\right]_1^2 - \int_1^2 (-2e^{-x}).dx$$

$$I = \frac{2}{e} - \frac{4}{e^2} - \left[2e^{-x}\right]_1^2$$

$$I = \frac{2}{e} - \frac{4}{e^2} - \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e}$$

$$\boxed{I = \frac{4}{e} - \frac{6}{e^2}}$$

b) $I = \int_0^1 x^3 e^{-x^2}.dx$

$$\begin{cases} u'(x) = x e^{-x^2} \rightarrow u(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \\ v(x) = x^2 \rightarrow v'(x) = 2x \end{cases}$$

$$I = \left[-\frac{x^2}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{-x^2}.dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 -2xe^{-x^2}.dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}}$$

c) $I = \int_0^{Ln2} e^{-x}.Ln(1+e^x).dx$

$$\begin{cases} v(x) = \text{Ln}\,(1+e^x) \rightarrow v'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \\ u'(x) = e^{-x} \rightarrow u(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = \left[-e^{-x}Ln(1+e^x)\right]_0^{\ln 2} + \int_0^{Ln2} \frac{1}{1+e^x}.dx$$

$$= \text{Ln}2 - 2\,\text{Ln}\,(1+e^{-\text{Ln}2}) + \int_0^{Ln2} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.dx$$

$$= \text{Ln}2 - 2\,\text{Ln}\frac{3}{2} + \left[-Ln(1+e^{-x})\right]_0^{\ln 2}$$

$$\boxed{I = 5\ln 2 - 3\text{Ln}3}$$

d) $I = \int_1^0 x^2 e^x.dx$

$$\begin{cases} u'(x) = e^x \rightarrow u(x) = e^x \\ v(x) = x^2 \rightarrow v'(x) = 2x \end{cases}$$

$$I = \left[x^2 e^x\right]_1^0 - \int_1^0 2xe^x.dx$$

$$I = -e - \int_1^0 2xe^x.dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = e^x \rightarrow u(x) = e^x \\ v(x) = 2x \rightarrow v'(x) = 2 \end{cases}$$

$$I = -e - \left(\left[2xe^x\right]_1^0 - \int_1^0 2e^x.dx\right)$$

$$I = -e - \left(-2e - \left[2e^x\right]_1^0\right). \boxed{I = 2 - e}$$

e) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-x}\sin x).dx$

$$\begin{cases} v(x) = \sin x \rightarrow v'(x) = \cos x \\ u'(x) = e^{-x} \rightarrow u(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = \left[-\sin x.e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-x}\cos x).dx$$

$$I = -e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-x}\cos x).dx$$

$$\begin{cases} v(x) = \cos x \rightarrow v'(x) = -\sin x \\ u'(x) = e^{-x} \rightarrow u(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = -e^{-\frac{\pi}{2}} + \left(\left[-\cos x.e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-x}\sin x).dx\right)$$

$$I = -e^{-\frac{\pi}{2}} + (1+I) \Rightarrow 2I = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{\pi}{2}})}$$

EX11

1) $t > 0$

$$(t + \frac{1}{t}) - 2 = \frac{t^2 + 1 - 2t}{t} = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0$$

D'où $(t + \frac{1}{t}) \geq 2$, pour $t > 0$

2) * pour $t = e^{\frac{x}{2}} > 0$ on a: $\frac{1}{t} = \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = e^{-\frac{x}{2}}$

on aura : $e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \geq 2$

* $e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \geq 2 \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) \geq 2e^{\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow e^x + 1 \geq 2e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \text{Ln}(e^x + 1) \geq \text{Ln}(2e^{\frac{x}{2}})$

$\Rightarrow \text{Ln}(e^x + 1) \geq \text{Ln}\,2 + \text{Ln}(e^{\frac{x}{2}})$

$\Rightarrow \text{Ln}(e^x + 1) \geq \frac{x}{2} + \text{Ln}\,2$

EX12

1) * $x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 \Rightarrow \boxed{e^x - 1 \geq 0}$ (1)

* On pose $U(x) = x e^x - e^x + 1$;

$x \in [0, +\infty[$

$U'(x) = x e^x \geq 0$

U est croissante sur $[0, +\infty[$

$x \geq 0 \Rightarrow U(x) \geq U(0)$

$\Rightarrow U(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{x e^x - e^x + 1 \geq 0}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 0 \leq e^x - 1 \leq x e^x \quad \forall x \in \text{IR}_+$

2) $x \geq 0$

Pour $t \in [0, x]$, on a :

$0 \leq e^t - 1 \leq t e^t \Rightarrow 0 \leq e^t - 1 \leq t e^x$

Car $e^t \leq e^x$

Donc :

$$0 \leq \int_0^x (e^t - 1).dt \leq \int_0^x te^x.dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left[e^t - t\right]_0^x \leq e^x \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x$$

EX13

$$f(x) = \frac{2 + e^x}{1 + e^x}$$

1) $f(x) = \dfrac{2(1 + e^x) - e^x}{1 + e^x}$

$$= 2 - \frac{e^x}{1 + e^x}$$

Donc a = 2 et b = – 1

2) $\int_0^1 f(x)dx = \left[2x - Ln(1 + e^x)\right]_0^1$

$= 2 - \ln(1 + e) + \text{Ln}2$

$= 2 + \text{Ln}(\frac{2}{1 + e})$

EX14

$Df = \text{IR}$

$f(x) = x - 2 + e^{-\frac{x}{2}}$

1) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} = 1 - \frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}$

$$= \frac{2e^{\frac{x}{2}} - 1}{2e^{\frac{x}{2}}}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -2\text{Ln}2$

x	$-\infty$	$-2\text{Ln}2$	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-2\text{Ln}2$	↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-2+e^{-\frac{x}{2}}) = +\infty \quad (e^{-\frac{x}{2}} \to 0)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty}(-2X-2+e^{X}) \quad \text{on pose } X = -\frac{x}{2}$$

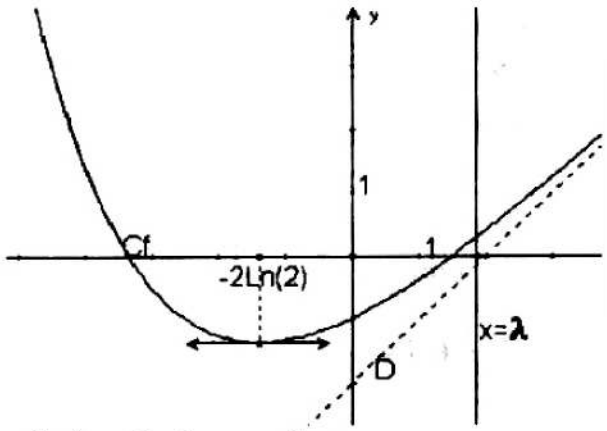
$$= \lim_{X\to+\infty} X\left(-2-\frac{2}{X}+\frac{e^X}{X}\right) = +\infty$$

2) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$

D'où la droite D d'équation : $y = x - 2$ est une asymptote à (ξf) au voisinage de $+\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{xe^{\frac{x}{2}}}\right) = -\infty$

Branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$



1) $\lambda > 0$, $\Delta : x = \lambda$

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} (f(x) - (x-2))dx = \int_0^{\lambda} e^{-\frac{x}{2}}dx = \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{\lambda}$$

$$A(\lambda) = 2\left(1-e^{-\frac{\lambda}{2}}\right) \text{u.a} \Rightarrow \lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 2$$

EX15

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1) $Df = IR$

1) $\forall x \in Df$ on a $(-x) \in Df$

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -f(x)$$

Donc f est impaire

2) $f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(x)$	+	
$f_n(x)$	-1 ↗	1

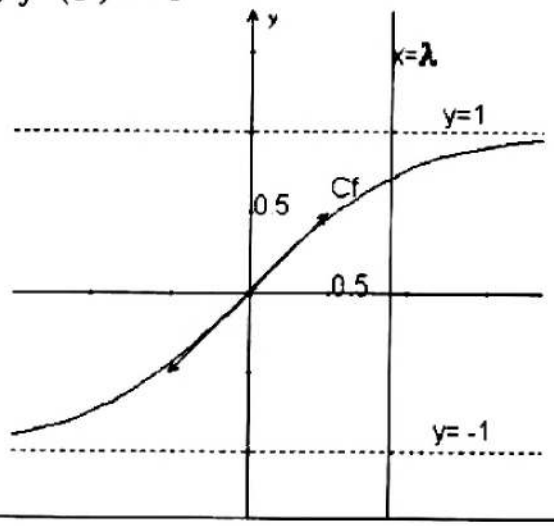
$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \right) = 1$$

($1 - \frac{1}{e^{2x}} \to 0$, $1 + \frac{1}{e^{2x}} \to 0$)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ car f est impaire

b) $f'(0) = 1$



3) $\lambda > 1$, $\Delta : x = \lambda$

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x).dx$$

$$= \left[Ln(e^x + e^{-x}) \right]_0^{\lambda}$$

$$= \text{Ln}(e^{\lambda} + e^{-\lambda}) - \text{Ln}\, 2$$

$$A(\lambda) = \text{Ln}\left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \right) \text{ u.a}$$

EX16

1) a/ on pose $u(x) = e^x - x - 1$; $x \in IR$

$u'(x) = e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	−	0	+
$u(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

u admet 0 comme minimum absolu en 0

$\Rightarrow u(x) \geq 0$; $\forall x \in IR$

$\Rightarrow u(x) > 0$; $\forall x \in IR^*$

$\Rightarrow e^x - x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > x + 1$

b) $x \neq 0$

(i) $t = -x$ d'après a) $e^t > t + 1$

$\Rightarrow e^{-x} > 1 - x$

(ii) pour $x \in]0, 1[$

$e^{-x} > 1 - x \Rightarrow \frac{1}{e^x} > 1 - x$ comme $1 - x > 0$

on aura : $e^x < \frac{1}{1 - x}$

2) $n \in IN^*$, $U_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

$V_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

a/ * d'après 1) $e^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n > (1 + \frac{1}{n})^n \Rightarrow \boxed{e > U_n}$ (1)

* $\frac{1}{n+1} \in]0, 1[$ d'après (ii)

$e^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \Rightarrow e^{\frac{1}{n+1}} < 1 + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow (e^{\frac{1}{n+1}})^{n+1} < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

$\Rightarrow \boxed{e < V_n}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $U_n < e < V_n$, $\forall n \in$ IN*

b/ $V_n - U_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n})^n$

$= [(1 + \frac{1}{n}) - 1](1 + \frac{1}{n})^n$

$= [(1 + \frac{1}{n}) - 1]U_n$

$V_n - U_n = \frac{1}{n}U_n$, $n \in$ IN*

$U_n \leq e \Rightarrow U_n \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{n}U_n \leq \frac{3}{n}$

D'où $V_n - U_n \leq \frac{3}{n}$, pour $n \in$ IN*

c/ $V_n - U_n \leq \frac{3}{n}$, $n \in$ IN*

$\frac{3}{n} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{n}{3} \geq 10^6 \Leftrightarrow n \geq 3.10^6$

D'où $U_{3\,000\,000} < e < V_{3\,000\,000}$ (calculatrice)

$\Rightarrow 2{,}718254 < e < 2{,}718255$

EX17 :

1) $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}.dx =$

$[Ln(1+e^x)]_0^1$ $\boxed{A = Ln(\frac{1+e}{2})}$

$B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.dx = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e+1}$ $\boxed{B = \frac{e-1}{2(e+1)}}$

2) $t > 0$

$\frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(1+2t+t^2)-(t^2+2t)}{(1+t)^2}$

$= 1 - \frac{t^2+2t}{(1+t)^2} = 1 - \frac{(t^2+t)+t}{(1+t)^2}$

$= 1 - (\frac{t}{1+t} + \frac{t}{(1+t)^2})$

$= 1 - \frac{t}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2}$

$(a = 1, b = -1 ; c = -1)$

$I = \int_0^1 (1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}).dx$

$I = \int_0^1 .dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$

$I = [x]_0^1 - (A + B)$

$I = 1 - (Ln(\frac{1+e}{2}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{e+1})$

$\boxed{I = 1 - (Ln(\frac{1+e}{2}) + \frac{e-1}{2(e+1)})}$

3) $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}.dx$

$$\begin{cases} v(x) = x \rightarrow v'(x) = 1 \\ u'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^3} \rightarrow u(x) = -\dfrac{1}{2(1+e^x)^2} \end{cases}$$

$$J = \left[\frac{-x}{2(1+e^x)^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx$$

$$J = -\frac{1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2}I$$

$$J = -\frac{1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2(1+e)} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$\boxed{J = \frac{e^2+4e+1}{2(1+e)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

EX18

1) $2 - e^{1/x} > 0 \Leftrightarrow e^{1/x} < 2 \Leftrightarrow 1/x < \ln(2)$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\ln(2)}$ ou $x < 0$

$S_{IR} =]\frac{1}{\ln(2)}; +\infty[\cup IR_-^*$

2) $f(x) = \ln(2-e^{1/x})$

a/ $D_f =]\frac{1}{\ln(2)}; +\infty[\cup IR_-^*$.

b/

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} Ln(2-e^{\frac{1}{x}}) = \lim_{X\to 0} Ln(2-e^X) = Ln(1) = 0$$

$$* \lim_{x\to\left(\frac{1}{Ln(2)}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{Ln(2)}\right)^-} Ln(2-e^{1/x}) = \lim_{X\to 0^+} Ln(X) = -\infty$$

$$* \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} Ln(2-e^{\frac{1}{x}}) = \lim_{X\to-\infty} Ln(2-e^X) = Ln(2)$$

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} Ln(2-e^{\frac{1}{x}}) = \lim_{X\to 0} Ln(2-e^X) = Ln(1) = 0$$

c/ $* \lim_{x\to 0^-} f(x) = Ln(2)$ (*finie*)

d où f est prolongeable par continuité à gauche en 0

3) a/

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{Ln(2-e^{1/x})-Ln(2)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{Ln(1-\frac{1}{2}e^{1/x})}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{2}\frac{e^{1/x}}{x}\right)\frac{Ln(1-\frac{1}{2}e^{1/x})}{\frac{1}{2}e^{1/x}} =$$

$$\lim_{X\to-\infty} \left(\frac{1}{2}X.e^X\right)\frac{Ln(1-\frac{1}{2}e^X)}{\frac{1}{2}e^X} =$$

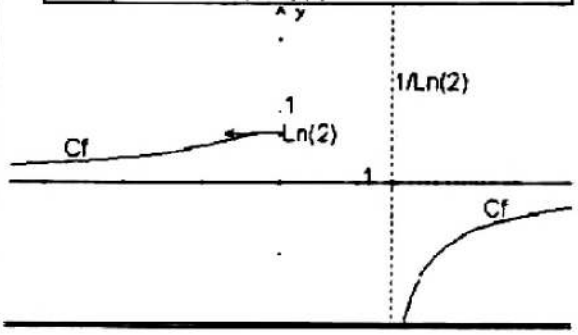
$$\lim_{X\to-\infty} \left(\frac{1}{2}X.e^X\right) \lim_{Y\to 0^-} -\frac{Ln(1+Y)}{Y} = 0\times(-1) = 0$$

Donc g est dérivable à gauche en 0 et $g'_g(0) = 0$

b/ g est dérivable sur chacune des intervalles $]-\infty;0]$ et $]\frac{1}{\ln(2)};+\infty[$ et pour $x \neq 0$ $g'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}.e^{1/x}}{2-e^{1/x}}$

$g'(x) > 0 \quad \forall x \in]-\infty;0] \cup]\frac{1}{\ln(2)};+\infty[$

x	$-\infty$	0	1/Ln(2)	$+\infty$
g'(x)	+		+	
g(x)	0 ↗ Ln(2)		$-\infty$ ↗ 0	



EX19 $a>0$, $G_a(x) = e^{-ax^2}$

1) la fonction : $x \to -ax^2$ est dérivable sur IR d'où G_a : $x \to e^{-ax^2}$ est dérivable sur IR et

on a : $G_a'(x) = -2ax\, e^{-ax^2}$, $a>0$ et $x \in IR$

2)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$G_a'(x)$	+	0	-
$G_a(x)$	0 ↗	1	↘ 0

$$\lim_{x \to +\infty} -ax^2 = \lim_{x \to -\infty} -ax^2 = -\infty$$

Donc $\lim_{x \to +\infty} G_a(x) = \lim_{x \to -\infty} G_a(x) = 0$

1) $G_a'(x) = -2ax\, e^{-ax^2}$

$G_a''(x) = -2a.(e^{-ax^2} - 2ax^2\, e^{-ax^2})$

$= -2a.(1-2ax^2)\, e^{-ax^2}$

On a : $1-2ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{2a}}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$+\infty$
$G_a''(x)$	+	0	- 0	+

G_a'' s'annule en $-\frac{1}{\sqrt{2a}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, en changeant de signe d'où les pts $I(\frac{-1}{\sqrt{2a}}, G_a(\frac{-1}{\sqrt{2a}}))$ et $J(\frac{1}{\sqrt{2a}}, G_a(\frac{1}{\sqrt{2a}}))$ sont deux points d'inflexion pour (ξ_{G_a})

avec : $I(-\frac{1}{\sqrt{2a}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ et $J(\frac{1}{\sqrt{2a}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$

4) $y_I = y_J = \frac{1}{\sqrt{e}}$

I et J appartient à la droite $\Delta : y = \frac{1}{\sqrt{e}}$

On a $x_I \neq 0$ et $x_J \neq 0$

Donc : $\xi = \Delta / \{ A(0, \frac{1}{\sqrt{e}}) \}$

5) $G_{\frac{1}{2}}(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$G_1(x) = e^{-x^2}$

$G_2(x) = e^{-2x^2}$

} fonctions paires

On a : $\frac{1}{2}x^2 \leq x^2 \leq 2x^2$

$\Leftrightarrow$

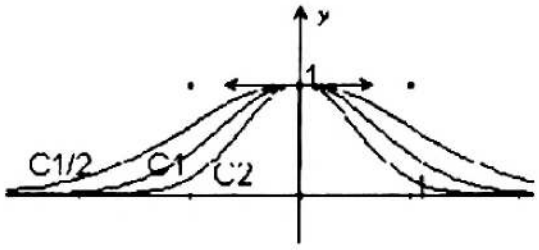
$-2x^2 \leq -x^2 \leq -\frac{1}{2}x^2$

Et comme la fonction exp est croissante

Donc $G_2(x) \leq G_1(x) \leq G_{\frac{1}{2}}(x)$

D'où : $\zeta_{\frac{1}{2}}$ au dessus de ζ_1

et ζ_1 Au dessus de ζ_2



EX20

$f(x) = |3x^2 - 1|.e^{1-x^2}$

1) $\forall x \in Df = IR$ on a $(-x) \in Df = IR$

$f(-x) = |3(-x)^2 - 1|.e^{1-(-x)^2}$

$= |3x^2 - 1|.e^{1-x^2} = f(x)$

D'où f est paire

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - 1).e^{1-x^2}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - 1).e.e^{-x^2}$ *posons* $X = -x^2$

$= \lim\limits_{X \to -\infty} (-3X - 1).e.e^{X}$

$= \lim\limits_{X \to -\infty} -3eX.e^{X} - e.e^{X} = 0$

3) f continue sur IR : produit de deux fonctions continues

4)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$3x^2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

* $\lim\limits_{x \to (\frac{1}{\sqrt{3}})^+} \frac{f(x) - f(\frac{1}{\sqrt{3}})}{x - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \lim\limits_{x \to (\frac{1}{\sqrt{3}})^+} \frac{(3x^2-1).e^{1-x^2}}{x - \frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= \lim\limits_{x \to (\frac{1}{\sqrt{3}})^+} \frac{3(x^2 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^2).e^{1-x^2}}{x - \frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= \lim\limits_{x \to (\frac{1}{\sqrt{3}})^+} \frac{3(x - \frac{1}{\sqrt{3}}).(x + \frac{1}{\sqrt{3}}).e^{1-x^2}}{x - \frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= \lim\limits_{x \to (\frac{1}{\sqrt{3}})^+} 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).e^{1-x^2}$

$= 2\sqrt{3}\ e^{\frac{2}{3}} = f'_d\ (\frac{1}{\sqrt{3}})$

* $\lim\limits_{x \to (\frac{1}{\sqrt{3}})^-} \frac{f(x) - f(\frac{1}{\sqrt{3}})}{x - \frac{1}{\sqrt{3}}} =$

$= \lim\limits_{x \to (\frac{1}{\sqrt{3}})^-} -3(x + \frac{1}{\sqrt{3}}).e^{1-x^2}$

$= -2\sqrt{3}\ e^{\frac{2}{3}} = f'_g\ (\frac{1}{\sqrt{3}})$

$f'_g\ (\frac{1}{\sqrt{3}}) \neq f'_d\ (\frac{1}{\sqrt{3}})$ d'où f n'est pas dérivable en $\frac{1}{\sqrt{3}}$

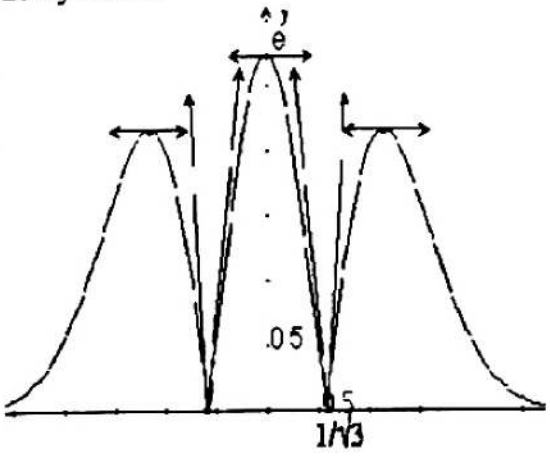
5) $f(x) = \begin{cases} (3x^2-1)e^{1-x^2} \text{ si } x \notin [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}] \\ -(3x^2-1)e^{1-x^2} \text{ si } x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}] \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x(4-3x^2)e^{1-x^2} \text{ si } x \notin [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}] \\ 2x(3x^2-4)e^{1-x^2} \text{ si } x \in]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[\end{cases}$

Tableau de variation sur IR_+ car f est paire :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$+$ 0	$-$
$f(x)$	e ↘	0 ↗	$3e^{-\frac{1}{3}}$ ↘	0

6) $y = 0$ asymptote à Cf et $(O\vec{j})$ axe de symétrie



EX21

$n \in IN$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\sin x.dx$$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\cos x.dx$$

1) $* \; I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} .\sin x.dx = [-\cos x.]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} .\cos x.dx = [\sin x.]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

2) $n \in IN^*$

$$* \; I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\sin x.dx$$

$$\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \rightarrow u'(x) = -n\, e^{-x} \\ v'(x) = \sin(x) \rightarrow v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

$$I_n = [-e^{-nx}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\cos x.dx$$

$I_n = 1 - nJ_n$, d'ou $\boxed{I_n + nJ_n = 1}$ (1)

$$* \; J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\cos x.dx$$

Soit

$$\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \rightarrow u'(x) = -n\, e^{-x} \\ v'(x) = \cos x \rightarrow v(x) = \sin x \end{cases}$$

$$J_n = [e^{-nx}\sin x.]_0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\sin x.dx$$

$$J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} + nI_n$$

d'ou $\boxed{J_n - nI_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}}$ (2)

(1) et (2) donne

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} nI_n + n^2 J_n = n \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow (1+n^2)J_n = n + e^{-n\frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{J_n = \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}}$$

$\Rightarrow$ * $I_n = 1 - nJ_n \Rightarrow I_n = 1 - \dfrac{n^2 + ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}$

$$\boxed{I_n = \frac{1 - n.e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}}$$

4) $I_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{1 - x.e^{-x\frac{\pi}{2}}}{x^2+1}$

$$\lim_{x \to +\infty} x.e^{-x\frac{\pi}{2}} = \lim_{X \to -\infty} -\frac{2}{\pi} X.e^{X} = 0$$

Posons $X = -x\dfrac{\pi}{2}$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

On a $I_n + nJ_n = 1 \Rightarrow J_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{I_n}{n}$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$

EX22: $n \in IN$

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-nx}.\sin x\, dx$$

1) Soit

$$\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \to u'(x) = -n\, e^{-x} \\ v'(x) = \sin x \to v(x) = -\cos x \end{cases}$$

$$I_n = \left[-e^{-nx}\cos x\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-nx}.\cos dx$$

Posons : $J_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-nx}.\cos dx$

$$\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \to u'(x) = -n\, e^{-x} \\ v'(x) = \cos x \to v(x) = \sin x \end{cases}$$

$J_n = \left[-e^{-nx}\sin x\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + n\, I_n = n\, I_n$

Car $\sin(k\pi) = 0 \ \forall k \in Z$

D'où: $I_n = \left[-e^{-nx}\cos x\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - n^2 I_n$

On a :

$\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\cos(n+1)\pi) = -(-1)^n$

Donc :

$I_n = e^{-n(n+1)\pi}.(-1)^n + e^{-n^2\pi}.(-1)^n - n^2 I_n$

$\Rightarrow$ $I_n = (-1)^n e^{-n^2\pi}.\left(\dfrac{1 + e^{-n\pi}}{n^2+1}\right)$

2) $|I_n| = e^{-n^2\pi}.\left(\dfrac{1 + e^{-n\pi}}{n^2+1}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |I_n| = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

EX23

$n \in IN^*$, $m \in IN$:

$$I_{(n,m)} = \int_0^1 t^n (1-t)^m dt \quad ; \quad I_{(n,0)} = \frac{1}{n+1}$$

1) Soit $u'(t) = t^n \Rightarrow u(t) = \dfrac{t^n}{n+1}$

$v(t) = (1-t)^m \Rightarrow v'(t) = -m(1-t)^m$

$$I_{(n,m)} = \left[\frac{1}{n+1} t^n (1-t)^m\right]_0^1 + \frac{m}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{m-1} dt$$

$\Rightarrow$ $I_{(n,m)} = \dfrac{m}{n+1} I_{(n+1,m-1)}$

2) d'après 1)

$\Rightarrow$ $I_{(n,m)} = \dfrac{m}{n+1} I_{(n+1,m-1)}$

$I_{(n+1,m-1)} = \dfrac{m-1}{n+2} I_{(n+2,m-2)}$

pour tout : $0 \le k \le m-1$

$$I_{(n+k,m-k)} = \frac{m-k}{n+k+1} I_{(n+k+1,m-k-1)}$$

$$I_{(n+m-1,1)} = \frac{1}{n+1} I_{(n+m,0)}$$

En multipliant terme à terme on aura

$$I_{(n,m)} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 2.1}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m)} I_{(n+m\ 0)}$$

$$I_{(n,m)} = \frac{m!}{\frac{(n+m)!}{n!}} I_{(n+m,0)}$$

Donc $I_{(n,m)} = \frac{m!n!}{(n+m)!} I_{(n+m\ 0)}$

Or $I_{(n+m\ 0)} = \frac{1}{n+m+1}$

$$\Rightarrow \boxed{I_{(n,m)} = \frac{m!n!}{(n+m+1)!}}$$

EX24

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{e^{U_n}}{U_n + 2} \quad , \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$; $x \in [0,1]$

$$f'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$$

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{e}{3}$

b) $f''(x) = \frac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^3} > 0$

Pour $x \in [0,1]$

f' est croissante sur $[0,1]$

$0 \le x \le 1 \Rightarrow f'(0) \le f'(x) \le f'(1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \le f'(x) \le \frac{2e}{9}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \le \frac{2e}{9} \le \frac{e}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{|f'(x)| \le \frac{e}{4}}$$

c) Soit $\varphi(x) = f(x) - x$

$\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$

car $|f'(x)| \le \frac{e}{4} < 1$

φ est strictement décroissante sur $[0,1]$

φ est continue sur $[0,1]$

$$\varphi(0).\varphi(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{3} - 1\right) < 0$$

D'où il existe un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$, par suite l'équation $f(x) = x$ admet α comme unique solution dans $[0,1]$

2) * pour n = 0

$$0 \le U_0 = \frac{1}{2} \le 1 \quad \text{(Vrai)}$$

* supposons que : $0 \le U_n \le 1$ et montrons que $0 \le U_{n+1} \le 1$

En –effet

$0 \le U_n \le 1 \Rightarrow f(0) \le f(U_n) \le f(1)$

Car f est strictement croissante sur $[0,1]$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq \frac{e}{3}$

$\Longrightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$

Conclusion : $0 \leq U_n \leq 1$, pour tout $n \in IN$

3) a) $\int_{\alpha}^{x} f'(v)dv = [f(v)]_{\alpha}^{x} = f(x) - f(\alpha)$

b) $x \in [0, 1]$

$$| f(x) - f(\alpha) | = | \int_{\alpha}^{x} f'(v)dv |$$

*Pour $x \geq \alpha$:

$$| f(x) - f(\alpha) | \leq \int_{\alpha}^{x} |f'(v)|dv$$

$$\Rightarrow | f(x) - f(\alpha) | \leq \int_{\alpha}^{x} \frac{e}{4} dv$$

$$\Rightarrow | f(x) - f(\alpha) | \leq \frac{e}{4}(x - \alpha)$$

*Pour $x < \alpha$:

$$| f(x) - f(\alpha) | = | \int_{x}^{\alpha} f'(v)dv |$$

$$\Rightarrow | f(x) - f(\alpha) | \leq \int_{x}^{\alpha} |f'(v)|dv$$

$$\leq \int_{x}^{\alpha} \frac{e}{4} dv \leq \frac{e}{4}(\alpha - x)$$

D'où

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{e}{4} |x - \alpha| \quad \forall x \in [0, 1]$$

$U_n \in [0, 1] \Rightarrow | f(U_n) - f(\alpha) | \leq \frac{e}{4} |U_n - \alpha|$

$$\Rightarrow | U_{n+1} - \alpha | \leq \frac{e}{4} |U_n - \alpha|$$

c) *pour $n = 0$

$$| U_0 - \alpha | = | \frac{1}{2} - \alpha | \leq \frac{1}{2}$$

Car $\alpha \in [0, 1]$

D'où $| U_0 - \alpha | \leq \frac{1}{2} (\frac{e}{4})^0$

(Vrai)

* supposons que :

$$| U_n - \alpha | \leq \frac{1}{2} (\frac{e}{4})^n$$

et montrons que

$$| U_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2} (\frac{e}{4})^{n+1}$$

D'après b)

$$| U_{n+1} - \alpha | \leq \frac{e}{4} | U_n - \alpha |$$ et comme

$$| U_n - \alpha | \leq \frac{1}{2} (\frac{e}{4})^n$$

alors $| U_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2} (\frac{e}{4})^{n+1}$

Conclusion : $| U_n - \alpha | \leq \frac{1}{2} (\frac{e}{4})^n$; $n \in IN$

Or $\frac{e}{4} \in]-1, 1[\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{e}{4}\right)^n = 0$ et par suite $\lim_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

EX 25 :

1) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{3})^x = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^{x-1} = \frac{1}{2} \times 2^x$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \lim_{x \to +\infty} (\frac{1}{2} \times 2^x) = +\infty$ car $2 > 1$

3) $\frac{2^x}{2^{x^2+x}} = \frac{2^x}{2^x . 2^{x^2}} = \frac{1}{2^{x^2}} = 2^{-x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{2^{x^2+x}} = \lim_{x \to +\infty} 2^{-x^2}$

$X = -x^2$ $\lim_{x \to -\infty} 2^X = 0$

4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}=\left(\frac{1}{4}\right)^x.\left[1-\frac{1}{4}\right]=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^x$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^x\right)=+\infty$ car $0<\frac{1}{4}<1$

5) $f(x)=\frac{3^x+3^{x+1}}{2^x+2^{x-1}}=\frac{4.3^x}{\frac{3}{2}.2^x}=\frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ car $\frac{3}{2}>1$

6) $\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}})=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}.\left[1-x^{\frac{1}{3}}\right]=-\infty$

7) $g(x)=\frac{\ln x}{2^x}=\frac{\ln x}{e^{x\ln 2}}=(\ln x).e^{-x\ln 2}=\left(\frac{\ln x}{x}\right)(xe^{-x\ln 2})$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$X=-x\ln 2$, $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x\ln 2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-Xe^X}{\ln 2}=0$

d'où $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0\times 0=0$

8) $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left[x.e^{-3x}\right]^{\frac{1}{3}}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-1}{3}Xe^X\right]^{\frac{1}{3}}=0$

(X=-3x)

9) $\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{2}{3}}\ln x-x^{\frac{4}{3}}\ln x)=0-0=0$

10) $\lim_{x\to+\infty}2^x-e^x=\lim_{x\to+\infty}2^x.\left[1-\left(\frac{e}{2}\right)^x\right]=-\infty$

EX 26 :

$x\in\left]0,+\infty\right[$

$f(x)=\ln(2^x)-\ln(x^2)$

1) $f(2)=\ln 4-\ln 4=0$

$f(4)=\ln 16-\ln 16=0$

2) $f(x)=x\ln 2-2\ln x$

$f'(x)=\ln 2-\frac{2}{x}=\frac{x.\ln 2-2}{x}$

x	0		2/ln2		+∞
f '(x)	||	-	0	+	
f(x)	|| +∞	↘	f(2/ln2)	↗	+∞

$*\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\ln 2-2\ln x=+\infty$

$*\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln 2-2\frac{\ln x}{x}\right]=+\infty$

$*f(\frac{2}{\ln 2})=2-2\ln(\frac{2}{\ln 2})<0$

x	0		2		4		+∞
f(x)	||	+	0	-	0	+	

3) $x\in[2,4]\to f(x)\le 0\Rightarrow 2^x\le x^2$

$x\in\left]0,2\right]\cup[4,+\infty[\to x^2\le 2^x$

EX 27 :

$f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^x=0$

d'où $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$

$*\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^x=+\infty$

d'où $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

2) f est dérivable sur IR et

$f'(x)=\ln\left(\frac{3}{5}\right).\left(\frac{3}{5}\right)^x+\ln\left(\frac{4}{5}\right).\left(\frac{4}{5}\right)^x<0$

car $\ln\left(\frac{4}{5}\right)<0$ et $\ln\left(\frac{3}{5}\right)<0$

f est strictement décroissante sur IR

$*3^x+4^x=5^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0$

• f est continue et strictement décroissante sur IR .elle réalise donc une bijection de IR sur f(IR)=]-1,+∞[

$0\in\left]-1,+\infty\right[$ d'où l'équation f(x)=0 admet une unique solution dans IR

(Rq: 2 est la seule solution de l'équation : $3^x+4^x=5^x$)

EX 28 :

$f(x)=\dfrac{4^x}{4^{2x}-1}$; $x\in\square^*$

1) $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x(4^x-4^{-x})}=\dfrac{1}{4^x-4^{-x}}$

$\square$ pour $x\in D_f=IR^*$ on a $(-x)\in D_f$

$\square f(-x)=\dfrac{1}{4^{-x}-4^x}=\dfrac{-1}{4^x-4^{-x}}=-f(x)$

d'où f est impaire

2) $f'(x)=\dfrac{4^x.\ln 4\left(4^{2x}-1\right)-4^x\left(2\ln 4\times 4^{2x}\right)}{\left(4^{2x}-1\right)^2}$

$f'(x)=\dfrac{(\ln 4).4^x.\left[4^{2x}-1-2\times 4^{2x}\right]}{\left(4^{2x}-1\right)^2}$

$f'(x)=\dfrac{(\ln 4).4^x.\left(-4^{2x}-1\right)}{\left(4^{2x}-1\right)^2}$

$f'(x)<0$; $\forall x\in\,]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
f '(x)	-	
f(x)	$+\infty$ ↘	0

$\square\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4^x}{4^{2x}-1}=+\infty$

$\square\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4^x-\left(\frac{1}{4}\right)^x}=0$

3) a) $f(x)=\dfrac{4}{15}\Leftrightarrow\dfrac{4^x}{4^{2x}-1}=\dfrac{4}{15}$

$\Leftrightarrow 4.(4^{2x}-1)=15\times 4^x\Leftrightarrow 4.(4^{2x})-15\times 4^x-4=0$

on pose $t=4^x$

l'équation devient : $4t^2-15t-4=0$

$\Delta=289\to\sqrt{\Delta}=17$

$t'=\dfrac{1}{4}$; $t''=4$

$\square t=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 4^x=\dfrac{-1}{4}$ impossible

$\square t=4\Leftrightarrow 4^x=4\Leftrightarrow x=1$

$S_{IR}=\{1\}$

b) $f(x)=\dfrac{-4}{15}\Leftrightarrow f(-x)=\dfrac{4}{15}$ car f est impaire

$\Leftrightarrow -x=1\ \Leftrightarrow x=-1$

$S_{IR}=\{-1\}$

EX 29 :

1) $\int_0^1 3^x dx=\int_0^1 e^{x\ln 3}dx=\left[\dfrac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3}\right]_0^1=\left[\dfrac{1}{\ln 3}(3^x)\right]_0^1=\dfrac{2}{\ln 3}$

2) $\int_0^{-1}\dfrac{3^x}{1+3^x}dx=\int_0^{-1}\dfrac{1}{\ln 3}.\dfrac{(\ln 3).3^x}{1+3^x}dx=\dfrac{1}{\ln 3}\left[\ln(1+3^x)\right]_0^{-1}$

$=\dfrac{1}{\ln 3}\left[\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)-\ln(2)\right]=\dfrac{\ln(\frac{2}{3})}{\ln 3}=\dfrac{\ln 2}{\ln 3}-1$

3) $\int_0^{\frac{1}{\ln 2}}2^x.(1+2^x)^2dx=\left[\dfrac{1}{\ln 2}\left(\dfrac{1}{3}(1+2^x)\right)^3\right]_0^{\frac{1}{\ln 2}}$

$=\dfrac{1}{3\ln 2}\left[(1+2^x)^3\right]_0^{\frac{1}{\ln 2}}=\dfrac{1}{3\ln 2}\left[(1+e)^3-2^3\right]$

car $2^{\frac{1}{\ln 2}}=e$

4) $\int_1^2 x^{\frac{4}{3}}dx=\left[\dfrac{1}{\frac{4}{3}+1}x^{\frac{4}{3}+1}\right]_1^2=\left[\dfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right]_1^2=\dfrac{3}{7}(2^{\frac{7}{3}}-1)$

5) $\int_{\frac{1}{2}}^1 4.x^{\frac{-1}{5}}dx=\left[5x^{\frac{4}{5}}\right]_{\frac{1}{2}}^1=5(1-2^{\frac{-4}{5}})$

6) $\int_0^1\sqrt[4]{x}dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{4}}dx=\left[\dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}\right]_0^1=\dfrac{4}{5}$

7) $\int_{\frac{1}{2}}^1(3x-1)^{\frac{3}{2}}dx=\dfrac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 3(3x-1)^{\frac{3}{2}}dx=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{2}{5}(3x-1)^{\frac{5}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^1$

$=\dfrac{2}{15}(2^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{-5}{2}})=\dfrac{2}{15}(4\sqrt{2}-\dfrac{1}{4\sqrt{2}})=\dfrac{31}{30\sqrt{2}}$

EX 30 :

1) $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x(\cos^2 x+\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x dx$

$$=\left[\frac{1}{\ln 2}2^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2^{\frac{\pi}{2}}-1}{\ln 2}$$

$$I+J=\frac{\sqrt{2^\pi}-1}{\ln 2}$$

2) $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x.cox(2x)dx$

$$\begin{cases} U'(x)=\cos 2x \rightarrow U(x)=\frac{1}{2}\sin(2x) \\ V(x)=2^x \rightarrow V'(x)=2^x.\ln 2 \end{cases}$$

$$K=\left[\frac{2^x\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x\sin(2x)dx$$

$$K=\frac{-\ln 2}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x.\sin(2x)dx$$

$$\begin{cases} U'(x)=\sin 2x \rightarrow U(x)=\frac{-1}{2}\cos 2x \\ V(x)=2^x \rightarrow V'(x)=2^x.\ln 2 \end{cases}$$

$$K=\frac{-\ln 2}{2}\left(\left[\frac{-2^x.\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x\cos 2x\right)$$

$$K=\frac{-\ln 2}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2^\pi}}{2}+\frac{\ln 2}{2}.K\right)$$

$$*K+\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2.K=\frac{-\ln 2}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2^\pi}}{2}\right)$$

$$K=\frac{-\ln 2}{4+(\ln 2)^2}(1+\sqrt{2^\pi})$$

$$*I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x(\cos^2 x-\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x\cos(2x)dx=K$$

d'où $I-J=\frac{-\ln 2}{4+(\ln 2)^2}(1+\sqrt{2^\pi})$

3) $\begin{cases} I+J=\frac{\sqrt{2^\pi}-1}{\ln 2} \\ I-J=\frac{-\ln 2}{4+(\ln 2)^2}(1+\sqrt{2^\pi}) \end{cases}$

EXERCICE 31

$\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\alpha > 1$

1) $f(x) = x^{-\alpha}$; $D_f =]0, \infty[$

$f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1} < 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$; $n \geq 1$

$k \leq x \leq k+1 \Rightarrow f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ car f est décroissante

$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dx$

$\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$

$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$

3) – a)

* $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n f(x)dx$

$\Rightarrow S_n - \frac{1}{k} \leq \int_1^n f(x)dx$

$\Rightarrow \boxed{S_n \leq S_1 + \int_1^n f(x)dx}$ (1)

* $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$

$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq S_1 + \int_1^n f(x)dx$

b) * $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(k+1)^\alpha} \geq 0$

d'où S_n est croissante

* $S_n \leq S_1 + \int_1^n f(x)dx$

$\int_1^n f(x)dx = [\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}[1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}]$

$\int_1^n f(x)dx \leq \frac{1}{\alpha-1}$ d'où $S_n \leq S_1 + \frac{1}{\alpha-1}$

$\Rightarrow S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \Rightarrow S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ d'où S_n est majorée par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$

c) (S_n) est croissante et majorée elle est donc convergente

$0 \leq S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ d'où $0 \leq \lim_{n \to +\infty} S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$

d) on a

$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq 1 + \int_1^n f(x)\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\int_1^n f(x)\,dx = [\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}[1 - n^{1-\alpha}]$

et $\int_1^{n+1} f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha-1}[1 - (n+1)^{1-\alpha}]$

et comme on a $\int_1^n f(x)\,dx \leq \frac{1}{\alpha-1}$ d'où

$\frac{1}{\alpha-1}[1 - (n+1)^{1-\alpha}] \leq S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$

$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{1-\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = 0 \quad \alpha > 1$

D'où $\frac{1}{\alpha-1} \leq lim\, S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$

$\frac{\alpha}{\alpha-1} = 2008 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2008}{2007}$ et dans ce cas

$\frac{1}{\alpha-1} = 2007$

D'où pour $\alpha = \frac{2008}{2007}$ on aura :

$2007 \leq \text{Lim } S_n \leq 2008$

EXERCICE 32

Partie A

$f(x) = 1 + x - e^{\frac{-x}{2}}$

1)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x - e^{\frac{-x}{2}}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 + x - e^{\frac{-x}{2}})$

$X = -\frac{x}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1-2X - e^{X}) = \lim\limits_{X \to +\infty} X(\frac{1}{X} - 2 - \frac{e^X}{X}) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} - e^{\frac{-x}{2}} = 0$

d'où D : $y = x + 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $(+\infty)$

c) $f(x) - (x+1) = - e^{\frac{-x}{2}} \leq 0$ d'où $(\mathcal{C})$ est au dessous de D

2) – a) $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} e^{\frac{-x}{2}} > 0$

b)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

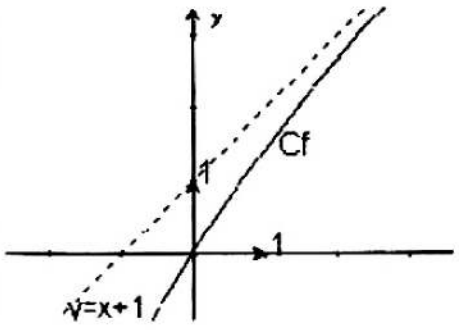
3)

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} + 1 - \frac{e^{\frac{-x}{2}}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x e^{\frac{x}{2}}} = +\infty$ ($x e^{\frac{x}{2}} \to 0^-$)

Donc $(\mathcal{C})$ admet une B.I parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$

* $f(0) = 0$



Partie B

$n > 0$

1) $A_n = \int_n^{n+1} ((x-1) - f(x))\, dx$

$A_n = \int_n^{n+1} e^{\frac{-x}{2}}\, dx = [-2e^{\frac{-x}{2}}]_n^{n+1}$

$A_n = 2[e^{\frac{-n}{2}} - e^{\frac{-n+1}{2}}]$ u.a

2) $A_n = 2[e^{\frac{-n}{2}} - e^{\frac{-n}{2}} . e^{\frac{-1}{2}}] = 2\, e^{\frac{-n}{2}} (1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$

$A_{n+1} = 2\, e^{-\frac{n+1}{2}} (1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$

$A_{n+1} = 2\, e^{-\frac{1}{2}} . e^{\frac{-n}{2}} (1 - \frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{1}{\sqrt{e}} A_n$

D'où (A_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{e}}$

3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = A_1 \frac{1-(\frac{1}{\sqrt{e}})^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}}$

$S_n = \frac{2}{\sqrt{e}} (1 - \frac{1}{\sqrt{e}}) . \frac{1-(\frac{1}{\sqrt{e}})^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{2}{\sqrt{e}} (1 - e^{\frac{-n}{2}})$

S_n : représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$; la droite D et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = n + 1$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n = \frac{2}{\sqrt{e}}$

EXERCICE 33

$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{1-x}$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} \cdot e^{1-x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e \cdot \frac{1}{\frac{e^x}{\sqrt{x}}} = 0$ ($\frac{e^x}{\sqrt{x}} \to +\infty$)

y = 0 est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisige de $(+\infty)$

2) a) la fction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

la fonction : $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$\Longrightarrow x \mapsto e^{1-x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

d'où la fonction est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant produit de deux fonctions dérivables

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{1-x} - \sqrt{x} \cdot e^{1-x}$

$f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} e^{1-x} \quad \forall x \in]0,+\infty[$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}\, e^{1-x}}{x}$

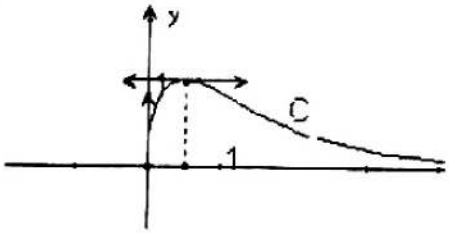
$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{1-x}}{\sqrt{x}} = +\infty$

$(\mathcal{C})$ admet une demie-tangente verticale au point d'abscisse 0

3)

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	↘	0

4)



$f(1) = 1$

5) $f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 0$

Soit $g(x) = f(x) - 1$

$g'(x) = f'(x)$

g est continue sur $[0,\frac{1}{2}]$

$g(0) \times g(\frac{1}{2}) = 1 - \sqrt{\frac{e}{2}} < 0$ d'ou l'équation

$g(x) = 0$ admet une solution α dans $]0,\frac{1}{2}[$

comme g est strictement croissante sur $[0,\frac{1}{2}]$ alors α est unique

* g est continue et strictement décroissante sur $]\frac{1}{2},+\infty[$

$g(]\frac{1}{2},+\infty[) =]-1,\sqrt{\frac{e}{2}} - 1[$

comme $0 \in]-1,\sqrt{\frac{e}{2}} - 1[$ alors il existe un unique réel $\beta \in]\frac{1}{2},+\infty[$ tel que $g(\beta)$

conclusion

α et β sont les seules solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans $[0,+\infty[$

* calculatrice $\Rightarrow 0,2 < \alpha < 0,21$

EXERCICE 34

Partie A

$g(x) = 2e^x - x - 2$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(2\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x - x - 2) = +\infty$

2) $g'(x) = 2e^x - 1$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\text{Ln}2$

x	$-\infty$		$-Ln2$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-1 + Ln2$	↗	$+\infty$

g est continue et strictemnt décte sur $]-\infty,-Ln2]$ elle réalise donc une bijection de $]-\infty,-Ln2]$ sur $[-1 + Ln2,+\infty[$

Comme $0 \in [-1 + Ln2,+\infty[$ alors il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty,-Ln2]$ tel que $g(\alpha) = 0$

$g(-1,6) \times g(-1,5) < 0$

$\Longrightarrow (-1,6) < \alpha < (-1,5)$

sur $[-1 + Ln2,+\infty[$ $g(0) = 0$

g est strictement croissante sur $]-Ln2,+\infty[$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet 0 comme unique solution dans $]-Ln2,+\infty[$

Conclusion l'équation $g(x) = 0$ admet 0 et α comme uniques solutions dans IR

4)

x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Partie B

$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

1) $* \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x(e^x - x - 1)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}) = +\infty$

$* \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - xe^x - e^x = 0$

2) $f'(x) = 2e^{2x} - [e^x + (x+1)e^x]$

$f'(x) = 2e^{2x} - xe^x - 2e^x$

$f'(x) = e^x[2e^x - x - 2]$

$f'(x) = e^x g(x)$

$e^x > 0$ d'ou $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe

x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$f(\alpha)$		0	$+\infty$

3) $g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2e^{\alpha} - \alpha - 2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{e^{\alpha} = \frac{\alpha+2}{2}}$ d'où

$f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)e^{\alpha}$

$f(\alpha) = (\frac{\alpha+2}{2})^2 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$

$f(\alpha) = -\frac{(\alpha^2+2\alpha)}{4}$

* soit $h(x) = -\frac{(x^2+2x)}{4}$

$h'(x) = -\frac{1}{2}(x+1) \geq 0$

$\forall x \in [-1,6 ; -1,5]$

h est croissante sur $[-1,6 ; -1,5]$

$(-1,6) \leq \alpha \leq (-1,5)$

$\Rightarrow h(-1,6) \leq h(\alpha) \leq h(-1,5)$

$\Rightarrow 0,16 \leq f(\alpha) \leq 0,185)$

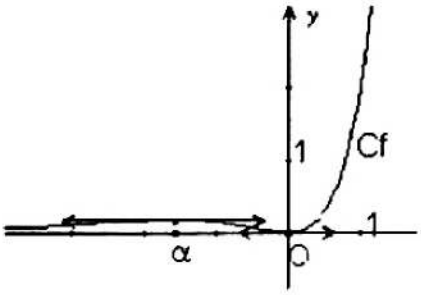
x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$f(\alpha)$		0	$+\infty$

5) $* \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x} - (x+1)\frac{e^x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}(e^x - x - 1)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}) = +\infty$

Donc $(\mathcal{C})$ admet une B.I parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$



$\alpha \approx -1,5$

$f(\alpha) \approx 0,17$

6) $m < 0$

a) $\begin{cases} u'(x) = e^x \longrightarrow u(x) = e^x \\ v(x) = x \longrightarrow v'(x) = 1 \end{cases}$

$\int_m^0 xe^x\,dx = [xe^x]_m^0 - \int_m^0 e^x\,dx$

$= -m e^m - [e^x]_m^0 = (1-m)e^m - 1$

b) $\int_m^0 f(x)\,dx = \int_m^0 (e^{2x} - xe^x - e^x)dx$

$= \int_m^0 e^{2x}dx - \int_m^0 xe^x dx - \int_m^0 e^x dx$

$= [\frac{1}{2}e^{2x}]_m^0 - (1-m)e^m + 1 - [e^x]_m^0$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2m} - (1-m)e^m + 1 - 1 + e^m$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2m} + me^m$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_m^0 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

EXERCICE 35

Partie A

$\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1) * $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1 = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} - 1)$

On pose : $X = -x$

$\lim\limits_{X \to -\infty} (X^2 e^X + Xe^X + e^X - 1) = -1$

2) $\varphi'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x}$

$\varphi'(x) = (-x^2 + x)e^{-x}$

le signe de $\varphi'(x)$ est celui de $(-x^2 + x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘		↗	$\frac{3}{e} - 1$	↘	
			0				-1

3) dans $]-\infty, 1[$ φ admet 0 comme minimum local

$\Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0 \; ; \; \forall x \in]-\infty; 1[$

$\Rightarrow \varphi(x) > 0 \; ; \; \forall x \in]-\infty; 1[\setminus \{0\}$

d'où l'équation $\varphi(x) = 0$ admet 0 comme unique solution dans $]-\infty; 1[$

* dans $[1, +\infty[$ φ est continue et strictement décroissante $\Rightarrow$ φ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]-1, \frac{3}{e} - 1]$

Comme $0 \in]-1, \frac{3}{e} - 1]$ d'où il existe un unique réel $\alpha \in [1, +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$

conclusion

α et 0 sont les seules solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$ dans $[1, +\infty[$

* à la calculatrice $\alpha \simeq$ .....

4)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Partie B

$f(x) = (2x + 1)e^{-x}$

$g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$

1) $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$

d'où $A(0,1) \in (\mathcal{C}_f) \cap (\mathcal{C}_g)$

2) a) $f(x) - g(x) = \frac{(2x + 1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$

b) $x^2 + x + 1 > 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		α		$+\infty$
$2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		α		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
P.R		$(\mathcal{C}_g)/(\mathcal{C}_f)$		$(\mathcal{C}_f)/(\mathcal{C}_g)$		$(\mathcal{C}_g)/(\mathcal{C}_f)$	

3) $F(x) = -(2x + 3)e^{-x}$

$F'(x) = -[2e^{-x} - (2x + 3)e^{-x}]$

$F'(x) = -[-(2x + 1)e^{-x}]$

$F'(x) = f(x)$

b) $h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$

$H(x) = F(x) - \text{Ln}(x^2 + x + 1) + k \; ; \; k \in \mathbb{R}$

$H(0) = 0 \Rightarrow F(0) + k = 0$

$\Rightarrow -3 + k = 0 \Rightarrow k = 3$

D'où

$H(x) = 3 - (2x + 3)e^{-x} - \text{Ln}(x^2 + x + 1)$

EX36

$f(x) = e^{-x} \text{Ln}(1 + e^x)$

Partie A

1) $g(t) = \frac{t}{t + 1} - \text{Ln}(1 + t) \; , \; t \in [0, +\infty[$

$g'(t) = \frac{1}{(t + 1)^2} - \frac{1}{t + 1}$

$g'(t) = \frac{-t}{(t + 1)^2} \leq 0 \; , \; \forall t \in [0, +\infty[$

t	0		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	0	↘	$-\infty$

$g(t) \leq 0 \; , \; \forall t \in [0, +\infty[$

2) a) la fonction $x \to e^{-x}$ est dérivable sur IR ,

La fonction $x \to 1+e^{x}$ est dérivable et

strictement positive sur IR donc $x \to \ln(1+e^{x})$

est dérivable sur IR et

par suite f est dérivable

sur IR (produit de deux fonctions dérivables)

$$f'(x) = -e^{-x}\,\mathrm{Ln}(1+e^{x}) + e^{-x}\,\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$f'(x) = e^{-x}\left[\mathrm{Ln}(1+e^{x}) - \frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right]$$

b) on a : $f'(x) = e^{-x}\,g(e^{x})$

pour $\boxed{t = e^{x}} \in [0, +\infty[$, on a $g(t) \le 0$

donc $f'(x) \le 0$ d'où f est strictement décroissante sur IR

3) a) $f(x) = e^{-x}\mathrm{Ln}(1+e^{x}) = e^{-x}\mathrm{Ln}[e^{x}(1+e^{-x})]$

$= e^{-x}[\mathrm{Ln}\, e^{x} + \ln(1+e^{-x})]$

$= e^{-x}[x + \ln(1+e^{-x})]$

$= x\,e^{-x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1+e^{-x}) = 0$

c)) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^{-x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$

on pose $X = e^{-x}$ donc $x = -\mathrm{Ln}X$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} [-X\mathrm{Ln}X + X\ln(1+X)]$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} X[-\mathrm{Ln}X + \ln(1+X)]$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} X\left[\ln\left(\frac{1+X}{X}\right)\right]$

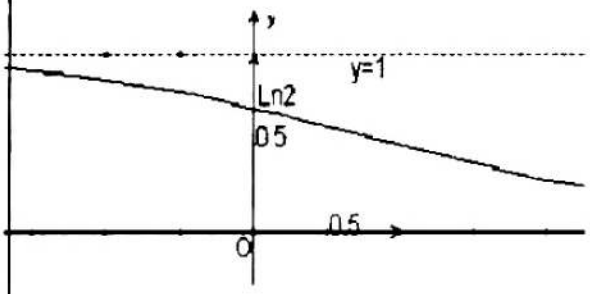
$= \lim\limits_{X \to +\infty} X\left[\ln\left(\frac{1+X}{X}\right)\right] = \lim\limits_{X \to +\infty} X\left[\ln\left(1+\frac{1}{X}\right)\right]$

On pose $t = \frac{1}{X}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

4)

t	$-\infty$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	1	↘	0



Partie B

$$\begin{cases} U_0 = 0{,}5 \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad . \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

On pose $\varphi(x) = f(x) - x$

$\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $f'(x) \le 0$

φ est continue est strictement décroissante sur IR

$\Rightarrow \varphi$ réalise une bijection de IR sur IR

comme $0 \in \varphi(\mathrm{IR})$ alors il existe un unique

réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$

$\varphi(0{,}5).\,\varphi(0{,}6) < 0 \Rightarrow 0{,}5 \le \alpha \le 0{,}6$

b) $0,5 \le x \le 0,6 \Rightarrow f(0,6) \le f(x) \le f(0,5)$
car f est décroissante
Calculatrice.... $\Rightarrow$ $0,5 \le f(x) \le 0,6$
$f(x) \ge 0$ d'après 2°) a)
$f'(x) \ge -0,25$ (à vérifier)
$\Rightarrow -0,25 \le f'(x) \le 0 \le 0,25$
$\Rightarrow |f'(x)| \le 0,25$

2) On a f est continue sur $[0,5; 0,6]$
f est dérivable sur $]0,5; 0,6[$
et $|f'(x)| \le 0,25 \quad \forall x \in]0.5; 0.6[$
α et $U_n \in [0,5; 0,6]$
(Remarque : pour $U_n \in [0,5; 0.6]$ par récurrence)
donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :
$|f(U_n) - f(\alpha)| \le (0,25)\ |U_n - \alpha|$
$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \le (0,25)\ |U_n - \alpha|$
*pour n = 0
On a : $|U_0 - \alpha| = |0,5 - \alpha| \le 0,1$
Car $0,5 \le \alpha \le 0,6$
$\Rightarrow |U_0 - \alpha| \le (0,25)^0 . 0,1$ (Vrai)
* supposons que : $|U_n - \alpha| \le (0.25)^n . 0,1$
et montrons que $|U_{n+1} - \alpha| \le (0,25)^{n+1} . 0,1$
en effet : $|U_{n+1} - \alpha| \le (0,25) . |U_n - \alpha|$
$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \le (0,25) . (0.25)^n . 0,1$
Car $|U_n - \alpha| \le (0,25)^n . 0,1$
Donc $|U_{n+1} - \alpha| \le . (0,25)^{n+1} . 0,1$
Conclusion : $|U_n - \alpha| \le (0.25)^n . 0,1$; $n \in IN$

b) $\lim_{n \to +\infty} (0,25)^n . 0,1 = 0$ d'où $\lim_{n \to +\infty} U_n - \alpha = 0$
et par suite $\lim_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

c) $(0,25)^n . 0,1 \le 5 \times 10^{-4}$
$\Leftrightarrow (0,25)^n . \le 5 \times 10^{-3}$
$\Leftrightarrow Ln(0,25)^n \le Ln(5 \times 10^{-3})$
(Ln croissante)
$\Leftrightarrow n.Ln(0,25) \le Ln(5 \times 10^{-3})$
($Ln a^n = n Ln a$)
$\Leftrightarrow n \ge \frac{Ln(5.10^{-3})}{Ln(0.25)}$ ($Ln(0,25) \le 0$)
$\Leftrightarrow n \ge 3,83....$ Donc $n = 4$

Partie c

1) $f'(x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

2) $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - f'(x)$

D'où $F(x) = -Ln(1+e^{-x}) - f(x)$

$F(x) = -Ln(1+e^{-x}) - e^{-x} Ln(1+e^{x})$

:est une primitive de f sur IR

EX37

Partie A

$f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) e^{-x} \qquad n \in IN^*$

1) la fonction $x \to \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ est dérivable sur IR
En particulier sur $[0, +\infty[$,comme étant fonction polynôme
La fonction e^{-x} est dérivable sur $[0, +\infty[$
D'où f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$

$$*f_n'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right) e^{-x} - e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right) e^{-x} - e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$
$$= -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

b) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (x^k e^{-x})$

$\lim_{x \to +\infty} x^k e^{-x} = \lim \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^k}\right)} = 0$ ($\frac{e^x}{x^k} \to +\infty$)

d'où $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$

c) $f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \le 0$, $\forall x \in [0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	−	
$f_n(x)$	1 ↘	0

2) a) $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^n \le 1$

$-1 \le -x \le 0 \Rightarrow 0 \le e^{-x} \le 1$

D'où : $0 \le x^n e^{-x} \le 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{n!} \le -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \le 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{n!} \le f_n'(x) \le 0$

b) On a: f est continue sur $[0, 1]$

f est dérivable sur $]0, 1[$

et $-\frac{1}{n!} \le f_n'(x) \le 0$, $\forall x \in]0, 1[$

Donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$-\frac{1}{n!}x \le f_n(x) - f_n(0) \le 0$, $\forall x \in]0, 1[$

Or $-\frac{1}{n!}x \ge -\frac{1}{n!}$

D'où $-\frac{1}{n!} \le f_n(x) - 1 \le 0$

3) pour $x \in [0, 1]$ on a :

$-\frac{1}{n!} \le f_n(x) - 1 \le 0$

Pour $x = 1$

$-\frac{1}{n!} \le f_n(1) - 1 \le 0$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n!} \le f_n(1) \le 1$

or $\lim 1 - \frac{1}{n!} = 1 \Rightarrow \lim f_n(1) = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)e^{-1} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

Partie B $n \ge 2$

$U_n = (1 - \frac{1}{n})^n$, $a_n = \text{Ln}(U_n)$

1) $a_n = \text{Ln}[(1 - \frac{1}{n})^n] = n\,\text{Ln}(1 - \frac{1}{n})$

$= \frac{Ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = -\frac{Ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$

2) $a_n = g(-\frac{1}{n})$ avec $g(x) = -\frac{Ln(1+x)}{x}$

$\lim_{n\to+\infty} (-\frac{1}{n}) = 0$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = -1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = -1$

3) $a_n = \text{Ln}(U_n) \Rightarrow U_n = e^{a_n}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} e^{a_n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

EX38

$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

Partie A

2) a) * pour $x \in Df = \text{IR}$ on a $(-x) \in Df$

$* f(x) + f(-x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$

$= \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1} = 2$

D'où $f(-x) = 2 - f(x)$

Et par suite A(1 , 0) est un centre de symétrie pour (ξ)

b)* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = -1$

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} =$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(3 - \frac{1}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3 - \frac{1}{e^x})}{(1 + \frac{1}{e^x})} = 3$$

Interprétation graphique :

Les droites d'équations respectives $y = -1$ et $y = 3$ Sont des asymptotes à (ξ)

c) $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$

Donc f est strictement croissante sur IR

2) a/ $f'(0) = 1$, $f(0) = 1$

D'où $\Delta : y = x + 1$

b) $g(x) = f(x) - (x + 1)$

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} - 1$$

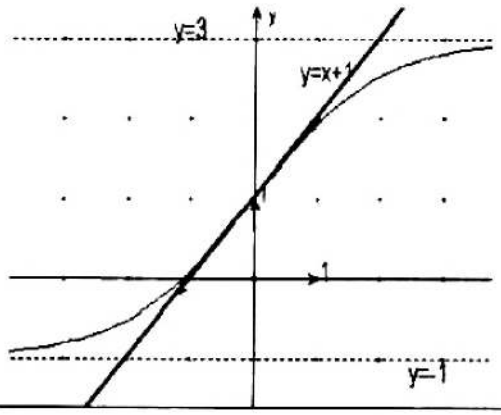
$$= \frac{4e^x - (e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2} =$$

$$\frac{-(e^{2x} - 2e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = -(\frac{e^x - 1}{e^x + 1^2})^2$$

c) g est strictement décroissante sur IR et g(0)=0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g (x)	+		-
Position relative	ξ_f au dessus de Δ		Δ au dessus de ξ_f

A(1,0)



Partie B I=[2 ;3]

1) a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow f(x) - (x + 1) = -1 \Leftrightarrow g(x) = -1$

b) $g'(x) < 0$; $\lim g = -\infty$ et ; $\lim g = +\infty$
$+\infty$ $-\infty$

g est continue est strictement décroissante sur IR donc g réalise une bijection de IR sur IR

Comme $-1 \in g(IR)$ alors il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = -1$

$g(\alpha) = -1 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$

D'ou α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans IR

et par suite $\xi \cap D = \{B(\alpha,\alpha)\}$

$(g(2) + 1)(g(3) + 1) < 0$

$\Rightarrow 2 < \alpha < 3$

2) $|f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{2}.|x - x'|$, $\forall x , x' \in I$

Comme on a : $\alpha \in I$ on aura :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}.|x - \alpha| ; \forall x \in I$$

3) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \ . \ n \in IN \end{cases}$

$U_n \in I$ (donnée)

a) d'après 2)

$$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}.|U_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}.|U_n - \alpha|$$

Montrons par récurrence que :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.|3 - \alpha|$$

*pour n=0

$$|U_0 - \alpha| = |3 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |3 - \alpha|$$

Donc la propriété est vraie pour n=0

* Supposons que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}.|3 - \alpha|$

et Montrons que : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.|3 - \alpha|$

On a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq 1/2 |U_n - \alpha|$

Or $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} . |3 - \alpha|$

d'ou $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} . |3 - \alpha|$

Conclusion :

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |3 - \alpha| \quad \forall n \in IN$

b) $\frac{1}{2^n} |3 - \alpha| \leq 10^{-3}$

On a $. |3 - \alpha| \leq 1$

Car : $2 < \alpha < 3$

$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 2^n \geq 1000$

$\Leftrightarrow n \ln 2 \geq \ln(1000) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(1000)}{\ln 2}$

Calculatrice ...⇒n≥10...⇒p=10.....

EX39

Partie A

$g(x) = e^x - \ln(x) - x.e^x + 1$ pour $x \in]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

$(e^x \longrightarrow 1 \ ; \ x.e^x \longrightarrow 0 \ ; \ \ln(x) \longrightarrow -\infty)$

2) $\lim_{x \to +\infty} g(x) =$

$$\lim_{x \to +\infty} xe^x \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{e^x} \right) . \left(\underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{0} \right) - 1 \right] + 1 = -\infty$$

3) $g'(x) = e^x - 1/x - (e^x + xe^x)$

$g'(x) = -(1/x + xe^x) < 0 \quad \forall x \in]0,+\infty[$

x		$+\infty$
g'(x)	—	
g(x)	$+\infty$ ↘	$-\infty$

4) g est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur R.

Comme $0 \in R$ alors il existe un nombre réel $\alpha \in]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

5) $g(1,23) \times g(1,24) < 0$

calculatrice

$\Rightarrow \quad \alpha \in]1,23 \ ; 1,24[$

6)

x	0		α		$+\infty$
g(x)	‖	+	0	-	

Partie B

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^x - \ln x} = 0 = f(0)$

d'ou f est continue à droite en 0.

2) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^x - \ln x} = 0$

d'ou f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

3) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}} = 0$

La droite d'équation y = 0 est une asymptote à (C) au voisin de $(+\infty)$.

4) $f'(x) = \dfrac{(e^x - \ln x) - x(e^x - 1/x)}{(e^x - \ln x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - \ln x)^2}$

f' et g sont de même signe.

x	0		α		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	0	↗	f(α)	↘	0

5) $g(\alpha) = 0 \Rightarrow -\ln\alpha - \alpha e^{\alpha} + 1 = 0$

$\Rightarrow -\ln\alpha = \alpha e^{\alpha} - 1$

d'ou

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha e^{\alpha} - 1} \quad \frac{1}{e^{\alpha} - 1/\alpha}$$

Partie C

$x \in]0,+\infty[$

1) $h(x) = \dfrac{1}{e^x - 1/x}$

$$h'(x) = \frac{-(e^x + 1/x^2) < 0}{(e^x - 1/x)^2}$$

h est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

2) $f(\alpha) = h(\alpha)$

$1,23 < \alpha < 1,24 \Leftrightarrow h(1,24) < h(\alpha) < h(1,23)$

(Car h est strictement décroissante)

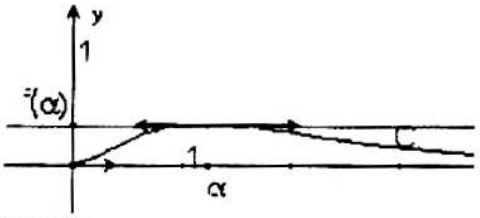
$\Rightarrow 0,377 < f(\alpha) < 0,383$ Donc 0,38 est une Valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2}

3) $\alpha \approx 1,23$; $f(\alpha) \approx 0,38$.

* $f'_d(0) = 0$

(C) admet demi tangente horizontale au point d'abscisse 0.

* $f'(\alpha) = 0$



EX40

Partie A

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \left(\frac{1-x}{2}\right).e^{2x}$$

1) a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}(x + e^{2x} - xe^{2x}) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(x + e^{2x} - xe^{2x})$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^{2x}}{2}\left(\frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{x} - 1\right) = -\infty$$

b) $\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}[e^{2x} - xe^{2x}] = 0$

$\Delta: y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote à (C) au voisin de $(-\infty)$.

c) $f(x) - \frac{1}{2}x = \left(\frac{1-x}{2}\right).e^{2x}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - x/2$	+	0	-
Position.Relatve	(C) / Δ		Δ / (C)

(1, 1/2)

2) f est dérivable sur IR comme étant produit et somme des fonctions dérivables.

$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[-e^{2x} + 2(1-x)e^{2x}]$

$f'(x) = \frac{1}{2}[1 + (1-2x)e^{2x}]$

3) $U(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$

a) $U'(x) = -2e^{2x} + 2(1-2x)e^{2x}$

$U'(x) = -4xe^{2x}$

$U'(x) < 0$, pour $x \in IR_+^*$.

$U'(x) > 0$, pour $x \in IR_-^*$.

U est strictement décroissante sur IR_+.

U est strictement croissante sur IR_-.

b) U est continue sur [0,1]

U est strictement décroissante sur [0,1]

$U(0) \times U(1) = 2.(1-e^2) < 0$

d'ou l'équation $U(x) = 0$ admet une solution unique α dans [0,1]

c) Calculatrice $\Rightarrow$

$U(0,63) \approx 0,0831$; $U(0,64) \approx -0,007$

Donc une valeur approchée décimale de α par excès A 10^{-2} près est 0,64.

d) $\lim_{x \to -\infty} U(x) = 1$; $\lim_{x \to +\infty} U(x) = -\infty$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
U'(x)	+	0	-	-
U(x)	1 ↗	2	↘ 0 ↘	$-\infty$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
U(x)	+	0	-

4) $f'(x) = \frac{1}{2}U(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

Partie B

$(C') : y = e^x$ $\Delta' : y = x$

1) $g(x) = e^x$ $g'(x) = e^x$

$(Cg) = (C')$

$T : y = e^t.(x - t) + e^t$

Pour $x = 0 \longrightarrow y = (1 - t)\,e^t$

d'ou $N_t\,(0, (1 - t)\,e^t)$

2) $P_t\,(t, t)$ $M_t\,(t, e^t)$

a) $M_{-2}\,(-2, e^{-2})$

$P_{-2}\,(-2, -2)$

$N_{-2}\,(0, 3e^{-2})$

$O\,(0, 0)$

$\overrightarrow{G_{-2}O} + \overrightarrow{G_{-2}M_{-2}} + \overrightarrow{G_{-2}P_{-2}} + \overrightarrow{G_{-2}N_{-2}} = \vec{0}$

$$x_{G-2} = \frac{0 + (-2) + (-2) + 0}{4} = -1$$

$$y_{G-2} = \frac{0 + e^{-2} - 2 + 3.e^{-2}}{4} = e^{-2} - \frac{1}{2}$$

b)

$$x_{Gt} = \frac{x_0 + x_{Mt} + x_{Pt} + x_{Nt}}{4}$$

$$x_{Gt} = \frac{t}{2}$$

$$y_{Gt} = \frac{y_0 + y_{Mt} + y_{Pt} + y_{Nt}}{4}$$

$$y_{Gt} = \frac{t + e^t + (1-t)e^t}{4} = \frac{t + (2-t)e^t}{4}$$

$$G_t = \left(\frac{t}{2}, \frac{t + (2-t)e^t}{4}\right) \Rightarrow Gt\left(\frac{t}{2}, f\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

L'ensemble des points G_t lorsque t varie dans IR est la courbe (C) de f.

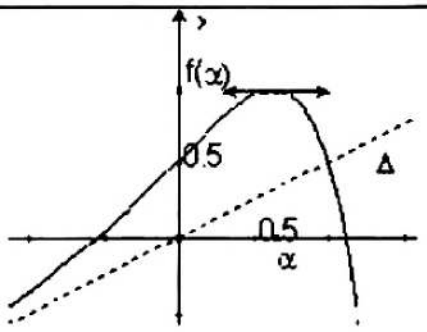
Partie C

1)

$\Delta : y = \frac{1}{2}x$ asymptote à (C) au voisin $(-\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} + \left(\frac{1-x}{2x}\right) e^{2x} = -\infty$$

B.I.parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage $(+\infty)$



2) (y=0 mal définie à éliminé)

$$A = \int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right)dx$$

$$A = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{2}\right) e^{2x} \, . \, dx$$

$$\begin{cases} U'(x) = e^{2x} \longrightarrow U(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \\ V(x) = \frac{1-x}{2} \longrightarrow V'(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = \left[\left(\frac{1-x}{4}\right) e^{2x} \right]_0^1 + \frac{1}{4} \int_0^1 e^{2x}.dx$$

$$A = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1$$

$$A = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$A = \frac{e^2 - 3}{8} \text{ U.a}$$

$$A = 4\left(\frac{e^2 - 3}{8}\right) cm^2 = \frac{e^2 - 3}{2} cm^2$$

EX41 $\begin{cases} f(x) = (x + 1)\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) pour $x \in\ ]0, +\infty[$ on a :

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(x + 1)\ e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} Q(x)$$

avec $Q(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$

b) $\lim_{t \to +\infty} (1+t)\,e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} (t\,e^{-t} + e^{-t}) = 0$

$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{e^t} + \frac{1}{\frac{e^t}{t}}\right) = 0$ ($\frac{e^t}{t} \to +\infty$)

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(1+x)e^{\frac{1}{x}}}{x}$

$= \lim_{x \to 0^+} (1+\frac{1}{x})\, e^{-\frac{1}{x}}$ on pose $t = \frac{1}{x}$

$= \lim_{t \to +\infty} (1+t)\,e^{-t} = 0$

d'ou f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

c) pour $x \in]0,+\infty[$ on a :

$f'(x) = (\frac{x^2+x+1}{x^2})\, e^{-\frac{1}{x}} > 0$

d'où f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\, e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$

(de la forme : $(+\infty) \times (1)$)

e) f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$

Comme $2 \in [0,+\infty[$ alors il existe un unique réel α ds $[0,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$

$f([2,3]) = [\frac{3}{\sqrt{e}}, \frac{4}{\sqrt[3]{e}}] = I$

$2 \in I$ donc $\alpha \in [2,3]$

2) $\varphi(t) = 1 - (1+t)\,e^{-t}$

a) $\varphi'(t) = t\,e^{-t}$ (enoncé à rectifier ds M-S)

b) montrons que : $0 \le \varphi(t) \le \frac{t^2}{2}$ pour $t>0$

pour $u \in [0,t]$ on a

$0 \le \varphi'(u) = u\,e^{-u} \le u$

D'où $0 \le \int_0^t \varphi'(u)\,du \le \int_0^t u.du$

$\Rightarrow 0 \le [\,\varphi'(u)\,]_0^t \le [\,\frac{u^2}{2}\,]_0^t$

$\Rightarrow 0 \le \varphi(t) \le \frac{t^2}{2}$

3) pour $x > 0$

$x - f(x) = x - (x+1)\, e^{-\frac{1}{x}}$

$= x\,[1 - (1+\frac{1}{x})\, e^{-\frac{1}{x}}] = x \cdot \varphi(\frac{1}{x})$

d'après 2) b) et pour $t = \frac{1}{x}$

$0 \le \varphi(\frac{1}{x}) \le \frac{1}{2x^2}$

$\Rightarrow 0 \le x..\varphi(\frac{1}{x}) \le \frac{1}{2x}$

$\Rightarrow 0 \le x - f(x) \le \frac{1}{2x}$

* $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$

d'où * $\lim_{x \to +\infty} x - f(x) = 0$

ce qui prouve que la droite D d'équation : $y = x$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $+\infty$

et comme $x - f(x) \ge 0$ pour tout $x \ge 0$ donc (ξ) au dessus de D

4) T_a :la tgte à (C) au poit d'abscisse $\frac{1}{a}$

On a $f'(x)=(\frac{x^2+x+1}{x^2})e^{-\frac{1}{x}}$ donc

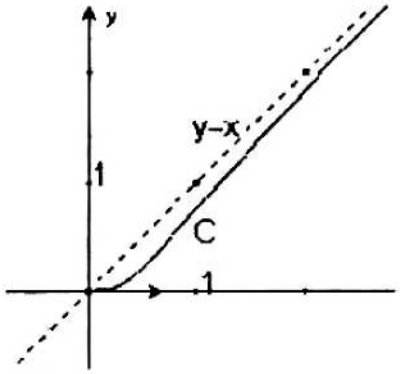
$f'(1/a)=(1+a+a^2)e^{-a}$

T_a : $y=(1+a+a^2)e^{-a}.(x-1/a)+(1+1/a).e^{-a}$

Donc T_a :$y=(1+a+a^2)e^{-a}.x-a.e^{-a}$

Pour $y=0 \Rightarrow x=\frac{a}{1+a+a^2}$

5)



EX42

$f_k(x)=\frac{kx+1}{x}e^x$ $x \in]0,+\infty[$ et $k \leq 0$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f_k(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{kx+1}{x}e^x=+\infty$

*pour k=0 $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

*pour k≠0 $k<0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{kx+1}{x}e^x=-\infty$

2) $f_k'(x)=-\frac{1}{x^2}e^x+\frac{kx+1}{x}e^x$

$f_k'(x)=\frac{kx^2+x+1}{x^2}e^x$

$f_k'(x)=0 \Leftrightarrow kx^2+x-1=0$

pour $k\neq 0$; $\Delta=1+4k$

- Si $k \in]-\frac{1}{4}, 0[$ l'équation $f_k'(x)=0$ admet deux solutions
- Si $k=0$ ou $k=-\frac{1}{4}$

L'équation $f_k'(x)=0$ admet une seule solution

- Si $k<-\frac{1}{4}$: aucune solutions

3) $(\xi f_{-1})=(\xi_2)$

$(\xi f_{-\frac{1}{4}})=(\xi_3)$

$(\xi f_0)=(\xi_1)$

4) $A(a)=\int_a^{a+1} f_0(x)dx$

a) A (a) représente l'aire de la partie du plan limitée par (ξf_0) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations respective x = a et x=a+1

b) $A(a)=\int_1^{a+1} f_0(x)dx-\int_1^a f_0(x)dx$

$A'(a)=f_0(a+1)-f_0(a)=\frac{e^{a+1}}{a+1}-\frac{e^a}{a}$

$A'(a)=(\frac{e}{a+1}-\frac{1}{a})e^a=\frac{(e-1)a-1}{a(a+1)}e^a$

x	0		$\frac{1}{e-1}$		$+\infty$
$A'(a)$	‖	−	0	+	
$A(a)$	‖	↘	$A(\frac{1}{e-1})$	↗	

A est décroissante sur $]0, \frac{1}{e-1}]$

A est croissante sur $[\frac{1}{e-1}, +\infty[$

c) $A(a)$ est minimale pour $a=\frac{1}{e-1}$

EX43

Partie A

1) Soit $h(x) = x + \ln x$; $x \in]0, +\infty[$

$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ sur $]0, +\infty[$

h est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ .donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $h(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel α de $]0, +\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$

Par suite l'équation (E) admet α comme unique solution dans $]0, +\infty[$

On a $h(\frac{1}{3}) \times h(\frac{2}{3}) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$

2) $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$

a) $\varphi(x) = x \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \ln x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \ln(\frac{1}{x}) = 0$

b) $\varphi(x) = x \Leftrightarrow h(\frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \alpha$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}$

c) $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow |\varphi'(x)| = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

On a : $\frac{3}{2} \le x \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{2}} \le e^{\frac{1}{x}} \le e^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{4} \le \frac{1}{x^2} \le \frac{4}{9} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow |\varphi'(x)| \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$

3) $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \varphi(V_n) \ . \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) * pour n = 0

$\frac{3}{2} \le V_0 \le 2$ (Vrai)

* supposons que : $\frac{3}{2} \le V_n \le 2$ et montrons que : $\frac{3}{2} \le V_{n+1} \le 2$

$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0$ donc φ décroissante sur l'intervalle $[\frac{3}{2}, 2]$

$\frac{3}{2} \le V_n \le 2 \Rightarrow \varphi(2) \le \varphi(V_n) \le \varphi(\frac{3}{2})$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}} \le V_{n+1} \le e^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \le V_{n+1} \le 2$

Conclusion : $\frac{3}{2} \le V_n \le 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) On a φ est dérivable sur $[\frac{3}{2}, 2]$

et $|\varphi'(x)| \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{\alpha}$ et $V_n \in [\frac{3}{2}, 2]$

donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$|\varphi(V_n) - \varphi(\frac{1}{\alpha})| \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} |V_n - \frac{1}{\alpha}| \Rightarrow$

$|V_{n+1} - \frac{1}{\alpha}| \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} |V_n - \frac{1}{\alpha}|$

c) Montrons par récurrence que :

$|V_n - \frac{1}{\alpha}| \le (\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}})^n |2 - \frac{1}{\alpha}|$

$\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \in]-1, 1[$ Donc $\lim (\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}})^n = 0$

Et par suite $\lim V_n = \frac{1}{\alpha}$

Partie B

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x+\ln x} & \text{si } x>0 \text{ et } x\neq \alpha \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) * $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x+\ln x} = 0 = f(0)$

d'ou f est continue à droite en 0.

* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+\ln x} = 0$

d'ou f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

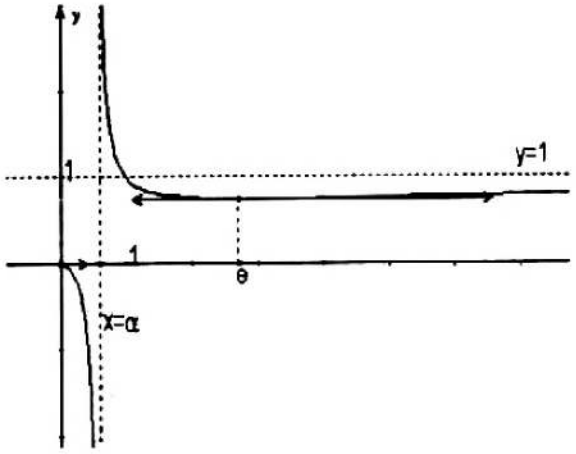
2) $f'(x) = \dfrac{(x+\ln x) - x(1+\frac{1}{x})}{(x+\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(x+\ln x)^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{\ln x}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1 = 1$$

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} \frac{x}{x+\ln x} = \frac{\alpha}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha^-} \frac{x}{x+\ln x} = \frac{\alpha}{0^-} = -\infty$$

x	$-\infty$	α	e	$+\infty$
f'(x)	−	−	0	+
f(x)	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	$\frac{e}{e+1}$ ↗	1



Partie C

$n \in IN^*$, $U_n = \int_1^e (\frac{\ln x}{x})^n dx$

1) $U_1 = \int_1^e \frac{1}{x}.\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

2) $U_2 = \int_1^e \frac{1}{x^2}.(\ln x)^2 dx =$

$$\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x^2} \longrightarrow u(x) = -\dfrac{1}{x} \\ v(x) = (\ln(x))^2 \longrightarrow v'(x) = \dfrac{2}{x}\ln x \end{cases}$$

$$U_2 = \left[-\frac{1}{x}(\ln x)^2\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{2}{x^2}.(\ln x).dx$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \int_1^2 \frac{2}{x^2}.(\ln x).dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = \dfrac{2}{x^2} \longrightarrow u(x) = -\dfrac{2}{x} \\ v(x) = \ln x \longrightarrow v'(x) = \dfrac{1}{x} \text{ d'où} \end{cases}$$

$$U_2 = -\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \left[-\frac{2}{x}\ln x\right]_1^2 - \int_1^e (-\frac{2}{x^2}).dx$$

$$U_2 = -\frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \ln 2 - \left[\frac{2}{x}\right]_1^2$$

$$\boxed{U_2 = 1 - \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln(2))^2}$$

3) $S_n(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} + (\frac{\ln x}{x})^2 + \ldots.+(-1)^n(\frac{\ln x}{x})^n$

Somme des (n + 1) termes d'une suite géométrique de raison $(-\frac{\ln x}{x})$

$$S_n(x) = \frac{1-\left(-\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{1+\frac{\ln x}{x}} = \frac{x}{x+\ln x}\left[1-(-1)^{n+1}.\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}\right]$$

4) $I_n = 1 - U_1 + U_2 - \ldots.. + (-1)^n U_n$

$I = \int_1^e f(x).dx$

a) $S_n(x) = f(x)\left[1-(1)^{n+1}(\frac{\ln x}{x})^{n+1}\right]$

$\Rightarrow \quad f(x) - S_n(x) = (-1)^{n+1} f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}$

$\Rightarrow \quad \int^2 f(x).dx - \int^2 S_n(x).dx$

$= \int^2 (-1)^{n+1} f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

$\Rightarrow \quad \int^2 f(x).dx - \int_1^2 [\ 1 - \frac{\ln x}{x} + (\frac{\ln x}{x})^2 +$ ...

$..+(-1)^n(\frac{\ln x}{x})^n\ ].dx =$

$\int^2 (-1)^{n+1} f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

$\Rightarrow \quad \int^2 f(x).dx - (1 - U_1 + U_2 - .....$

$+ (-1)^n U_n\ ) = \int^2 (-1)^{n+1} f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

$\Rightarrow \quad I - I_n = \int^2 (-1)^{n+1} f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

b) $k(x) = \frac{\ln x}{x}$; $x > 0$

$k'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

x	0		e		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)		↗	1/e	↘	

k admet $\frac{1}{e}$ comme maximum absolu sur $]0,+\infty[$

$\Rightarrow \quad k(x) \le \frac{1}{e}$, pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$

$\Rightarrow \quad \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e}$, pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$

$| I - I_n | = | \int^2 (-1)^{n+1} f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx |$

$| \int^2 f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx | \le$

$\int^2 |f(x)|.(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

$\Rightarrow \frac{2}{2+\ln 2} \le f(x) \le 1 \Rightarrow |f(x)| \le 1$

D'où $\int^2 |f(x)|.dx \le \int^2 dx = 1$

, et par suite : $| I - I_n | \le \frac{1}{e^{n+1}}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{n+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n - I = 0 \Rightarrow \lim I_n = I$

d) $| I - I_2 | \le \frac{1}{e^3} \Rightarrow -\frac{1}{e^3} \le I - I_2 \le \frac{1}{e^3}$

$\Rightarrow I_2 - \frac{1}{e^3} \le I \le I_2 + \frac{1}{e^3}$

d'où $\boxed{I_2 - \frac{1}{e^3} \le I \ (1)}$

d'après 4°) a) :

$I - I_2 = \int^2 -f(x).(\frac{\ln x}{x})^3.dx \le 0$

car $-f(x)(\frac{\ln x}{x})^3 \le 0, \forall x \in [1, 2]$

d'où $\boxed{I \le I_2 \ (2)}$

(1) + (2) $\Rightarrow \quad I_2 - \frac{1}{e^3} \le I \le I_2$

Partie D $\quad F(x) = \int^{e^x} f(t).dt$

1) la fonction u: $x \to e^x$ est dérivable sur IR_+

et $u(IR_+) = [1, +\infty[$ et $1 \in [1, +\infty[$

comme f est continue sur $[1, +\infty[$

alors F est dérivable sur IR_+

et on a $F'(x) = u'(x).f(u(x)) = e^x f(e^x)$ $\quad F'(x) = e^x$.

$\frac{e^x}{x + e^x} = \frac{e^{2x}}{x + e^x}$

2) f admet $\frac{e}{e+1}$ comme minimum absolu sur $[1,+\infty[$

$\Rightarrow f(t) \ge \frac{e}{e+1} \ge \frac{1}{2}, \forall t \in [1, +\infty[$

3) $f(t) \ge \frac{1}{2} \quad \forall t \in [1, +\infty[$

et $e^x \ge 1 \ \forall x \in IR_+$

$\Rightarrow \quad |I-I_n| \leq \int_1^2 |f(x)|.(\frac{1}{e})^{n+1}.dx$

$|I-I_n| \leq (\frac{1}{e})^{n+1}.\int_1^2 |f(x)|.dx$

On a : $1 \leq x \leq 2$ donc

$f(2) \leq f(x) \leq f(1)$ (f est décrte sur [1 , 2]

$\Rightarrow F(x) \geq \int_1^x \frac{1}{2}.dt = \left[\frac{1}{2}t\right]_1^x \quad \forall x \in IR_+$

$\Rightarrow F(x) \geq \frac{1}{2}(e^x - 1) \quad \forall x \in IR_+$

Or. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(e^x-1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

$* \frac{F(x)}{x} \geq \frac{1}{2}(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x})$ pour x > 1

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

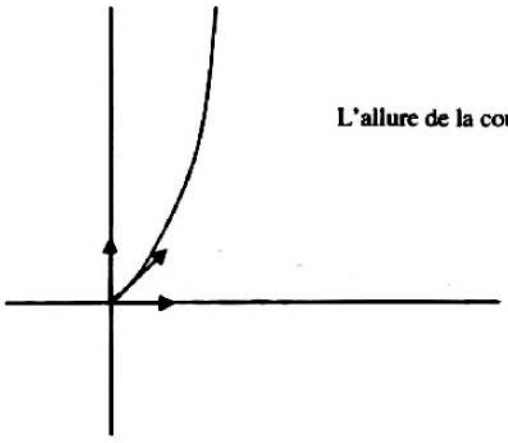
D'où $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

4) $F'(x) = \frac{e^{2x}}{x + e^x} > 0 \quad \forall x \in IR_+$

$F(0) = \int_1^1 f(t).dt = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$: Branche infinie parabolique de direction$(O,\vec{j})$

$F'(0) = 1 \Rightarrow$ y = x tangente en O



L'allure de la courbe de F

D'où $\int_1^x f(t)dt \geq \int_1^x \frac{1}{2}.dt \quad \forall x \in IR_+$